ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К.Ю. Осипенко

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского

Пусть с фиксированной погрешностью известен конечный набор коэффициентов Фурье некоторой периодической функции. Что можно сказать о самой функции и о ее производных на основании этой информации? Вопрос достаточно естественный и далеко не новый. Как поступают на практике? Высокочастотные коэффициенты Фурье отбрасывают, а остальные фильтруют, т.е. умножают на некоторые сглаживающие коэффициенты. С математической точки зрения эта задача может быть решена с помощью метода регуляризации. Однако при этом возникает ряд вопросов, которые не решаются при использовании этого метода.

Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной — как же перебрать все методы? Наша цель — показать, что во многих случаях и, в частности, в задаче восстановления функции по неточно заданным коэффициентам Фурье, такая постановка позволяет дойти до конкретных методов.

Перейдем к точным формулировкам. Положим

$$X_p = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots) : \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j |x_j|^p < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

где $x_j \in K$, $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, а $\nu_j \ge 0$, причем лишь конечное число ν_j обращается в ноль. Если $\nu_0 = \nu_1 = \ldots = 1$, то соответствующее пространство X_p обычно обозначают через l_p, при этом

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Пусть задан оператор $T\colon X_p \to l_p$

$$Tx = (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \ldots),$$

где $\mu_j \in K$, а последовательность $|\mu_j|^p/\nu_j$ для достаточно больших j ограничена (из этого условия вытекает, что $Tx \in l_p$ для всех $x \in X_p$).

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора T на множестве

$$W_p = \left\{ x \in X_p : \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j |x_j|^p \le 1 \right\}$$

по неточно заданным координатам $x_0, \dots, x_N$. Точнее, предполагается, что для любого $x \in W_p$ известен вектор $y = (y_0, \dots, y_N)$, $y_j \in K$, $j = 0, \dots, N$, такой, что $\|I^N x - y\|_{l_p^N} \le \delta$, где $I^N x = (x_0, \dots, x_N)$, а $\|\cdot\|_{l_p^N}$ определяется равенством (1), в котором суммирование ведется до N. По вектору y надо восстановить наиболее точно значение Tx.

Под методами восстановления понимаются всевозможные отображения $m\colon K^N \to l_p$. Для данного метода m его погрешностью называется величина

$$e_N(T, W_p, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W_p,\ y \in K^N \\ \|I^N x - y\|_{l_p^N} \le \delta}} \|Tx - m(y)\|_p.$$

Величина

$$E_N(T, W_p, \delta) = \inf_{m\colon K^N \to l_p} e_N(T, W_p, \delta, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, — оптимальным.

Будем предполагать, что $\nu_j > 0$ для всех $j \ge N+1$. Положим

$$A = \sup_{j \ge N+1} \frac{|\mu_j|^p}{\nu_j},$$
$$M = \operatorname{co}\{(0,0) \cup \{(\nu_j, |\mu_j|^p)\}_{j \in \mathbb{N}}\} + \{(t, tA) \mid t \ge 0\},$$

где $\operatorname{co}\Omega$ — выпуклая оболочка множества Ω. Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по правилу: $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная.

Теорема. *При всех $\delta > 0$*

$$E_N(T, W_p, \delta) = \delta \theta^{1/p}(\delta^{-p}).$$

Пусть δ^{-p} принадлежит тому промежутку на $\mathbb{R}_+$, где $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t$. Если $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 > 0$, то для всех α_j, $0 \le j \le N$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \dfrac{|\mu_j - \alpha_j|^q}{\nu_j^{q/p} \widehat{\lambda}_2^{q/p}} + \dfrac{|\alpha_j|^q}{\widehat{\lambda}_1^{q/p}} \le 1, & 1 < p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1, \\ \dfrac{|\mu_j - \alpha_j|}{\nu_j \widehat{\lambda}_2} \le 1, \quad \dfrac{|\alpha_j|}{\widehat{\lambda}_1} \le 1, & p = 1, \end{cases}$$

методы

$$\widehat{m}(y) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j y_j e_j,$$

где $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ *— стандартный базис, являются оптимальными. Если* $\widehat{\lambda}_1 = 0$*, то* $\widehat{m}(y) = 0$ *— оптимальный метод, а если* $\widehat{\lambda}_2 = 0$*, то*

$$\widehat{m}(y) = \sum_{j=0}^{N} \mu_j y_j e_j$$

— оптимальный метод.

Частный случай приведенного здесь результата рассмотрен в работе [1], а его непрерывный аналог, т.е. для функций, заданных на прямой, исследован в [2].

1. *Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. // Матем. сб. — 2002. — Т. 193, вып.3 — С.79–100.

2. *Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных. // Функц. анализ и его прилож. — 2003. — Т. 37. — С. 51–64.