

О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА КЛАССАХ ХАРДИ–СОБОЛЕВА

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. Для функций из класса Харди–Соболева H_∞^r , определяемого как множество функций, аналитических в единичном круге и удовлетворяющих в нем условию $|f^{(r)}(z)| \leq 1$, строятся наилучшие квадратурные формулы, использующие значения функций и их производных в фиксированной системе узлов из интервала $(-1, 1)$. Для периодического класса Харди–Соболева $H_{\infty, \beta}^r$, определяемого как множество 2π -периодических функций, аналитических в полосе $|\operatorname{Im} z| < \beta$ и удовлетворяющих в ней условию $|f^{(r)}(z)| \leq 1$, доказано, что для равномерной системы узлов формула прямоугольников является наилучшей, и найдена ее погрешность. Построены наилучшие квадратурные формулы на классе $H_{p, \beta}$, определение которого аналогично классу $H_{\infty, \beta}$, но ограничения на функцию задаются в L_p -норме по границе. Построен также оптимальный метод восстановления функций из класса H_p^r по тейлоровской информации $f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0)$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , W — некоторое подмножество X и L, l_1, \dots, l_n — линейные функционалы на X . Под задачей оптимального восстановления функционала L на множестве W по значениям информационного оператора $Ix = (l_1x, \dots, l_nx)$, $x \in W$, понимается задача о нахождении величины

$$(1) \quad \epsilon(L, W, I) := \inf_{S: K^n \rightarrow K} \sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)|,$$

а также метода S , на котором достигается нижняя грань в (1) (если таковой существует), называемом оптимальным методом восстановления.

Задачи оптимального восстановления, начиная с работы [1], изучались многими авторами (см. [2]–[5] и цитируемую там литературу). Отметим здесь лишь один результат, доказанный в [1] для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №99-01-01181 и №00-15-96109).

вещественного пространства и в [6] — для комплексного: для выпуклого уравновешенного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный и имеет место равенство

$$(2) \quad e(L, W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|.$$

Всякий элемент x_0 , на котором достигается верхняя грань в (2), будем называть экстремальным.

Задача (2) часто оказывается проще, чем задача нахождения оптимального метода. В связи с этим в работе [7] был предложен метод, позволяющий при наличии некоторой параметризации экстремального элемента в задаче (2) находить оптимальный метод восстановления. Здесь этот метод используется для нахождения наилучших квадратурных формул и оптимального восстановления по тейлоровской информации на классах Харди–Соболева.

Классом Харди–Соболева H_p^r будем называть множество функций f , аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\sup_{z \in D} |f^{(r)}(z)| \leq 1, \quad p = \infty.$$

Периодическим классом Харди–Соболева $H_{p,\beta}^r$ будем называть множество 2π -периодических функций f , аналитических в полосе $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 \leq \eta < \beta} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (|f^{(r)}(t + i\eta)|^p + |f^{(r)}(t - i\eta)|^p) dt \right)^{1/p} \leq 1,$$

$$\sup_{z \in S_\beta} |f^{(r)}(z)| \leq 1.$$

При $r = 0$ соответствующие классы будем обозначать через H_p и $H_{p,\beta}$.

В §1 для класса H_∞^r и информационного оператора

$$(3) \quad If = (f(x_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, f(x_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(x_n)),$$

где x_1, \dots, x_n — различные точки из интервала $(-1, 1)$, а ν_1, \dots, ν_n — четные числа, строится линейный оптимальный метод интегрирования (наилучшая квадратурная формула) для интеграла

$$\int_{-1}^1 f(x)p(x)dx,$$

в котором $p(x)$ — неотрицательная весовая функция.

В §2 строится наилучшая квадратурная формула на классе $H_{\infty,\beta}^r$ для равноотстоящих узлов. Доказано, что таковой является формула прямоугольников, и найдена ее погрешность. При $r = 0$ для

В §3 построены наилучшие квадратурные формулы для класса $H_{p,\beta}$ по информационному оператору (3), в котором x_1, \dots, x_n — различные точки из $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$. Аналогичная задача в непериодическом случае решена в [11, стр. 175]. В §4 построен оптимальный метод восстановления функций из класса H_p^r по информационному оператору $If = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0))$. Оптимальные методы в этой задаче исследовались ранее в работах [12] ($p = \infty, r = 2$), [2] ($p = \infty, r = 1$), [13] ($1 \leq p \leq \infty, r = 0$), [14] ($p = \infty, r \in \mathbb{Z}_+$, многомерный случай), [11, стр. 69] ($1 \leq p \leq \infty, r = 0$, многомерный случай).

Теорема 1. Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X и x_0 — экстремальный элемент в задаче оптимального восстановления линейного функционала L на множестве W по значениям линейных функционалов l_1x, \dots, l_nx . Пусть каждому $M = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ из некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ поставлен в соответствие элемент $x(M) \in W$, причем $x(M_0) = x_0$. Тогда, если функции $\varphi(M) := Lx(M)$, $\varphi_j(M) := l_jx(M)$, $j = 1, \dots, n$, имеют в окрестности M_0 непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы

$$J(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

$$Lx \approx \sum_{j=1}^n C_j l_j x,$$
$$J(M_0)\mathbf{C} = \text{grad } \varphi|_{M_0},$$

§1. НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА КЛАССЕ H_∞^r

Рассмотрим задачу оптимального восстановления (1) для $W = H_\infty^r$,

$$(4) \quad Lf = \int_1^1 f(x)p(x) dx,$$

где $p(x)$ — неотрицательная весовая функция, и информационного оператора I , определенного равенством (3). Положим

$$(5) \quad N := \sum_{j=1}^n \nu_j.$$

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений. Напомним, что система вещественных функций $\{u_k(t)\}_{k=0}^m$, m раз непрерывно дифференцируемых на интервале (c, d) , называется *ЕТ-системой*, если каждый обобщенный полином

$$P(t) = \sum_{k=0}^m C_k u_k(t), \quad \sum_{k=0}^m C_k^2 \neq 0,$$

имеет на (c, d) не более m корней с учетом алгебраической кратности.

Произведением Бляшке порядка n называется функция вида

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

где $|\lambda| = 1$, а $z_j \in D$, $j = 1, \dots, n$. Для $\mu_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, и $\alpha_j \in (-1, 1)$ положим

$$W_j(x) := \frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j x}, \quad W(x) := \prod_{j=1}^m \left(\frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j x} \right)^{\mu_j}.$$

Лемма 1. Система функций

$$(6) \quad g_{jk}(x) := W(x) (W_j^{-k}(x) - W_j^k(x)), \quad k = 1, \dots, \mu_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

является *ЕТ-системой* на $(-1, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенный полином

$$P(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\mu_j} C_{jk} g_{jk}(x), \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\mu_j} C_{jk}^2 \neq 0.$$

В силу того, что $W_j(\pm 1) = \pm 1$, этот обобщенный полином можно записать в виде

$$P(x) = a_0 \frac{(1 - x^2)x^l \prod_{j=1}^s (x - a_j)}{\prod_{j=1}^m (1 - \alpha_j x)^{2\mu_j}},$$

где $a_0, a_1, \dots, a_s \neq 0$. Поскольку $W_j(x^{-1}) = W_j^{-1}(x)$, имеем

$$P(x^{-1}) = \frac{1}{W(x)} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\mu_j} C_{jk} (W_j^k(x) - W_j^{-k}(x)) = -W^2(x)P(x).$$

Из последнего равенства легко получить, что с каждым нулем $a_j \neq 0$ функции P связан нуль этой функции a_j^{-1} той же кратности, а

кроме того, что $l + s/2 = \sum_{j=1}^m \mu_j - 1$. Тем самым обобщенный полином P в интервале $(-1, 1)$ имеет не более $\sum_{j=1}^m \mu_j - 1$ нулей с учетом алгебраической кратности. \square

Для функций f , аналитических в единичном круге, положим $T_0 f := f$ и

$$(7) \quad (T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z - \zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta) d\zeta, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $(T_r f)^{(r)} = f$, и следовательно, $T_r f \in H_\infty^r$ при всех $f \in H_\infty$.

Пусть

$$\sum_{j=1}^m \mu_j + r = N.$$

Определим функции $\omega_1, \dots, \omega_N$ равенством

$$(8) \quad (\omega_1(z), \dots, \omega_N(z)) := (1, z, \dots, z^{r-1}, \\ (T_r g_{11})(z), \dots, (T_r g_{1\mu_1})(z), \dots, (T_r g_{m1})(z), \dots, (T_r g_{m\mu_m})(z)).$$

Положим

$$(9) \quad (a_{j1}, \dots, a_{jN}) := I\omega_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad A := \{a_{jk}\}_{j,k=1}^N.$$

Лемма 2. $\det A \neq 0$.

Доказательство. Если $\det A = 0$, то найдутся C_1, \dots, C_N , не все равные нулю, для которых функция

$$F(z) := \sum_{j=1}^N C_j \omega_j(z)$$

в интервале $(-1, 1)$ будет иметь по крайней мере N нулей с учетом кратности. В этом случае по теореме Ролля $F^{(r)}$ должна иметь в том же интервале не менее $N - r$ нулей. Поскольку

$$F^{(r)}(z) = C_{r+1} g_{11}(z) + \dots + C_N g_{m\mu_m}(z),$$

то из леммы 1 вытекает, что $C_{r+1} = \dots = C_N = 0$, но тогда и $C_1 = \dots = C_r = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\det A \neq 0$. \square

Обозначим через $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ множество функций из H_∞^r , вещественных в интервале $(-1, 1)$.

Предложение 1. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$. Тогда при всех четных ν_1, \dots, ν_n существует функция $F \in H_\infty^{r, \mathbb{R}}$, имеющая вид

$$F = P_{r-1} + T_r W,$$

где P_{r-1} — полином степени $r-1$, а W — произведение Бляшке порядка $N-r$

$$W(z) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z} \right)^{\mu_j}, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j = N - r,$$

$x_1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m \leq x_n$, для которой $IF = 0$ и

$$\sup_{\substack{f \in H_{\infty}^{r, \mathbb{R}} \\ If=0}} \int_{-1}^1 f(x)p(x) dx = \int_{-1}^1 F(x)p(x) dx.$$

Доказательство. Из работы [15] вытекает существование функции $F \in H_{\infty}^{r, \mathbb{R}}$, нормированной условием $F(1) > 0$, для которой $IF = 0$ и такой, что $F^{(r)}$ является произведением Бляшке порядка $N-r$. Кроме того, в той же работе доказано, что при всех $x \in (-1, 1)$ имеет место равенство

$$(10) \quad \sup_{\substack{f \in H_{\infty}^{r, \mathbb{R}} \\ If=0}} |f(x)| = |F(x)|.$$

Из теоремы Ролля вытекает, что функция F не имеет других нулей в интервале $(-1, 1)$ кроме нулей в точках x_1, \dots, x_n с четными кратностями ν_1, \dots, ν_n . Поэтому в силу нормировки $F(1) > 0$ для всех $x \in (-1, 1)$ $F(x) \geq 0$. Учитывая равенство (10), получаем утверждение предложения. \square

Теорема 2. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$, ν_1, \dots, ν_n — четные числа, W — произведение Бляшке из предложения 1, а g_{jk} , ω_j и матрица A определены равенствами (6), (8) и (9), соответственно. Тогда метод

$$(11) \quad \int_{-1}^1 f(x)p(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\nu_j-1} c_{jk} f^{(k)}(x_j),$$

в котором c_{jk} определяются из системы

$$(12) \quad A\mathbf{c} = \mathbf{d},$$

где $\mathbf{c} = (c_{10}, \dots, c_{1, \nu_1-1}, \dots, c_{n0}, \dots, c_{n, \nu_n-1})$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)$,

$$d_j = \int_{-1}^1 \omega_j(x)p(x) dx, \quad j = 1, \dots, N,$$

является оптимальным на классе H_{∞}^r .

Доказательство. Докажем сначала, что метод (11) является оптимальным на классе $H_{\infty}^{r, \mathbb{R}}$. Положим $W_{j0}(z) := 1$, $j = 1, \dots, m$, и

$$W_{j,k+1}(z) := \frac{W_j(z)W_{jk}(z) + \varepsilon_{j,k+1}}{1 + \varepsilon_{j,k+1}W_j(z)W_{jk}(z)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, \mu_j-1.$$

При всех $\varepsilon_{j1}, \dots, \varepsilon_{j,\mu_j} \in (-1, 1)$ функции $W_{j,\mu_j} \in H_\infty$. Положим для $P = (a_0, \dots, a_{r-1}, \varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1,\mu_1}, \dots, \varepsilon_{m1}, \dots, \varepsilon_{m,\mu_m}) \in \mathbb{R}^N$

$$f_P(z) := \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + (T_r W_P)(z),$$

где

$$W_P(z) = \prod_{j=1}^m W_{j,\mu_j}(z).$$

Пусть полином P_{r-1} из предложения 1 имеет вид

$$P_{r-1}(z) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^0 z^j.$$

Тогда в силу предложения 1 при $P = P_0 := (a_0^0, \dots, a_{r-1}^0, 0, \dots, 0)$ функция f_{P_0} является экстремальной в задаче оптимального восстановления интеграла (4) на классе $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ по информации (3). Определим функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ равенством

$$(\varphi_1(A), \dots, \varphi_N(P)) := If_P.$$

Нетрудно убедиться, что в точке P_0

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_N}{\partial a_j} \right) &= I\omega_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq r-1, \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon_{jk}}, \dots, \frac{\partial \varphi_N}{\partial \varepsilon_{jk}} \right) &= I(T_r g_{jk}), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq \mu_j. \end{aligned}$$

Положив

$$\varphi(P) = \int_{-1}^1 f_P(x) p(x) dx,$$

легко проверить, что в точке P_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a_j} &= \int_{-1}^1 x^j p(x) dx, \quad 0 \leq j \leq r-1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}} &= \int_{-1}^1 (T_r g_{jk})(x) p(x) dx, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq \mu_j. \end{aligned}$$

Из теоремы 1, учитывая лемму 2, вытекает теперь, что коэффициенты оптимального метода на классе $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ определяются из системы (12).

Докажем теперь, что построенный метод (обозначим его через S) является оптимальным и для класса H_∞^r . Предположим, что найдется функция $f_0 \in H_\infty^r$, для которой

$$|Lf_0 - S(If_0)| > e(L, H_\infty^r, I).$$

Тогда для функции $\overline{f_0(\bar{z})} \in H_\infty^r$ также выполнено это неравенство. В силу уравниваемости класса H_∞^r без ограничения общности можно считать, что $Lf_0 - S(I f_0) > 0$. Следовательно, для функции

$$g(z) := \frac{f_0(z) + \overline{f_0(\bar{z})}}{2} \in H_\infty^{r, \mathbb{R}}$$

имеем

$$Lg - S(Ig) > e(L, H_\infty^r, I) \geq e(L, H_\infty^{r, \mathbb{R}}, I),$$

что невозможно в силу оптимальности метода S на классе $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$. \square

§2. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Построим теперь оптимальный метод интегрирования для интеграла

$$Lf = \int_{\mathbb{T}} f(x) dx$$

на классе $H_{\infty, \beta}^r$ по информационному оператору

$$(13) \quad If = \left(f(0), f\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right).$$

При достаточно общих условиях на класс функций можно доказать, что формула прямоугольников является оптимальным методом интегрирования, использующим информационный оператор (13). Пусть \mathcal{H} — выпуклый и уравниваемый класс непрерывных на всей вещественной оси 2π -периодических функций f таких, что для любых вещественных констант C и a $f(x) + C \in \mathcal{H}$ и $f(x + a) \in \mathcal{H}$.

Лемма 3. *Формула прямоугольников*

$$(14) \quad \int_{\mathbb{T}} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$$

является оптимальным методом интегрирования на классе \mathcal{H} , а для ее погрешности справедливо равенство

$$e(L, \mathcal{H}, I) = 2\pi \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)|,$$

где \mathcal{H}_n — множество функций из \mathcal{H} периода $2\pi/n$, для которых

$$(15) \quad \int_0^{2\pi/n} f(x) dx = 0.$$

Если функции из класса \mathcal{H} дифференцируемы, то формула прямоугольников является оптимальным методом интегрирования и

для информационного оператора

$$I_1 f = \left(f(0), f'(0), f\left(\frac{2\pi}{n}\right), f'\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right), f'\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right).$$

Доказательство. В работе [16] (см. также [17, стр. 208]) было доказано, что

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(x) dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \right| = 2\pi \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)|.$$

Тем самым

$$e(L, \mathcal{H}, I) \leq 2\pi \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)|.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $g \in \mathcal{H}_n$, для которой

$$|g(0)| > \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)| - \varepsilon.$$

В силу свойств класса \mathcal{H}_n можно считать, что

$$g(0) = - \max_{x \in [0, 2\pi/n)} |g(x)|.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(x) := g(x) - g(0).$$

Поскольку $f_0 \in \mathcal{H}$ и $I f_0 = 0$, то из (2) имеем

$$e(L, \mathcal{H}, I) \geq \left| \int_{\mathbb{T}} f_0(x) dx \right| = 2\pi |g(0)| > 2\pi \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)| - 2\pi \varepsilon.$$

Таким образом,

$$e(L, \mathcal{H}, I) = 2\pi \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)|,$$

а формула прямоугольников — оптимальный метод для информационного оператора I .

В случае дифференцируемости функций из класса \mathcal{H} для доказательства оптимальности формулы прямоугольников для информационного оператора I_1 достаточно заметить, что $I_1 f_0 = 0$ и в силу (2)

$$e(L, \mathcal{H}, I) \geq e(L, \mathcal{H}, I_1).$$

□

Теорема 3. При всех $r \geq 1$ формула прямоугольников (14) является оптимальным методом интегрирования на классе $H_{\infty, \beta}^r$ для

информационных операторов I и I_1 , а для ее погрешности справедливости равенства

$$\begin{aligned} e(L, H_{\infty, \beta}^r, I) &= e(L, H_{\infty, \beta}^r, I_1) \\ &= \frac{2\pi^2}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)} = \frac{4\pi}{n^r} e^{-\beta n} + O\left(\frac{e^{-5\beta n}}{n^r}\right), \end{aligned}$$

где

$$\lambda = 4e^{-2\beta n} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-4\beta n m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-4\beta n m^2}} \right)^2,$$

а

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ .

Доказательство. Оптимальность формулы прямоугольников на классе $H_{\infty, \beta}^r$ для информационных операторов I и I_1 вытекает непосредственно из леммы 3. Остается найти величину

$$\sup_{f \in H_{\infty, \beta, n}^r} |f(0)|,$$

где $H_{\infty, \beta, n}^r$ — множество функций f из $H_{\infty, \beta}^r$, имеющих период $2\pi/n$ и удовлетворяющих условию (15). Положим

$$\begin{aligned} a_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos jx \, dx, \quad j = 0, 1, \dots, \\ b_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin jx \, dx, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$(16) \quad \sup_{f \in H_{\infty, \beta, n}^r} |f(0)| \leq \sup_{\substack{f \in H_{\infty, \beta}^r \\ a_0(f)=a_1(f)=b_1(f)=\dots=a_{n-1}(f)=b_{n-1}(f)=0}} |f(0)|.$$

Величина, стоящая в правой части неравенства (16) была вычислена в работе [18]. Она достигается на функции

$$\varphi_{n,r}^{\beta}(z) := \begin{cases} \Phi_{n,r}^{\beta}\left(z + \frac{\pi}{2n}\right), & r = 2l, \\ \Phi_{n,r}^{\beta}(z), & r = 2l + 1, \end{cases}$$

где

$$\Phi_{n,r}^{\beta} := D_r * \Phi_{n,0}, \quad r \geq 1, \quad \Phi_{n,0}^{\beta}(z) := \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi} z, \lambda\right),$$

$$D_r(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt - \pi r/2)}{m^r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

— ядро Бернулли, а

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z-t)g(t) dt.$$

В работе [19] было показано, что

$$\Phi_{n,r}^{\beta}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)nz - \pi r/2)}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}.$$

Тем самым $\varphi_{n,r}^{\beta} \in H_{\infty,\beta,n}^r$, а следовательно,

$$\sup_{f \in H_{\infty,\beta,n}^r} |f(0)| \geq |\varphi_{n,r}^{\beta}(0)| = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}.$$

Для получения асимптотики погрешности остается воспользоваться хорошо известным равенством (см., например, [20])

$$\Lambda = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-4\beta n m^2} \right)^2.$$

□

§3. НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА КЛАССАХ $H_{p,\beta}$

Рассмотрим теперь задачу построения оптимального метода интегрирования для интеграла

$$Lf = \int_{\mathbb{T}} f(t)p(t) dt,$$

где $p(t)$ — неотрицательная весовая функция, на классе $H_{p,\beta}$ по информационному оператору (3), в котором x_1, \dots, x_n — различные точки из \mathbb{T} .

Положим

$$(17) \quad k = 4e^{-\beta} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\beta m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\beta m^2}} \right)^2.$$

Обозначим через K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k и $k' = \sqrt{1-k^2}$, соответственно (равенство (17) эквивалентно тому, что $\pi K'/K = 2\beta$). Для полосы S_{β} 2π -периодическим произведением Бляшке с нулями в точках x_j с четными кратности ν_j является функция (см. [10])

$$B(t) = k^{N/2} \prod_{j=1}^n \operatorname{sn}^{\nu_j} \left(\frac{K}{\pi}(t - x_j), k \right),$$

где N определено равенством (5).

Через $H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}$ будем обозначать множество функций из класса $H_{p,\beta}$, вещественных на вещественной оси.

Лемма 4. Пусть ν_1, \dots, ν_n — четные числа и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

1) существует единственная функция $g_{B,p} \in H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}$, для которой

$$e(L, H_{p,\beta}, I) = \int_{\mathbb{T}} g_{B,p}(t) B(t) p(t) dt,$$

2) $g_{B,p}$ не имеет нулей в полосе S_β и $g_{B,p}(t) > 0$ при $t \in \mathbb{T}$,

3) при $1 \leq p < \infty$ для почти всех $t \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$(18) \quad e(L, H_{p,\beta}, I) |g_{B,p}(t + i\beta)|^p = \int_{\mathbb{T}} g_{B,p}(\tau) B(\tau) K_\beta(t - \tau) p(\tau) d\tau,$$

где

$$K_\beta(t) = \frac{2\Lambda}{\pi} \operatorname{dn} \left(\frac{\Lambda}{\pi} t, \lambda \right),$$

а Λ — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ , определяемого из условия $\pi\Lambda'/\Lambda = \beta$.

Доказательство. Из работы [21] вытекает, что в задаче

$$P_1 := \sup_{f \in H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| B(t) p(t) dt$$

существует единственная функция $g_{B,p} \in H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}$, нормированная условием $g_{B,p}(0) > 0$, на которой эта верхняя грань достигается. Кроме того, из той же работы вытекает, что эта функция не имеет нулей в полосе S_β (а следовательно, $g_{B,p}(t) > 0$ при $t \in \mathbb{T}$) и при всех $1 \leq p < \infty$

$$P_1 |g_{B,p}(t \pm i\beta)|^p = \int_{\mathbb{T}} |g_{B,p}(\tau)| B(\tau) K_\beta(t - \tau) p(\tau) d\tau.$$

Поскольку всякая функция $f \in H_{p,\beta}$, для которой $If = 0$, может быть представлена в виде

$$f(z) = B(z)g(z), \quad g \in H_{p,\beta},$$

то в силу (2)

$$e(L, H_{p,\beta}, I) = \sup_{f \in H_{p,\beta}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) B(t) p(t) dt \right| =: P_2.$$

Приемом, аналогичным тому, который использовался при доказательстве теоремы 2, легко показать, что

$$e(L, H_{p,\beta}, I) = e(L, H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}, I).$$

Поскольку

$$P_1 \geq e(L, H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}, I) \geq \int_{\mathbb{T}} g_{B,p}(t) B(t) p(t) dt = P_1,$$

то

$$P_1 = e(L, H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}, I) = P_2.$$

□

При $p = \infty$ и четных ν_1, \dots, ν_n очевидно, что $g_{B,p}(z) \equiv 1$.

Пусть $p = 2$. Пространство 2π -периодических функций $\mathcal{H}_{2,\beta}$, аналитических в полосе S_β и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 \leq \eta < \beta} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (|f(t + i\eta)|^2 + |f(t - i\eta)|^2) dt < \infty,$$

является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{H}_{2,\beta}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi,$$

где $\Gamma = [i\beta, 2\pi + i\beta] \cup [-i\beta, 2\pi - i\beta]$. Из работы [18] вытекает, что при всех $f \in \mathcal{H}_{2,\beta}$ и любом $t \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$f(t) = (f, g_t)_{\mathcal{H}_{2,\beta}},$$

где

$$g_t(z) = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \left(\frac{K}{\pi}(t - z), k \right),$$

а K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k , определяемого из условия $K'/K = 2\beta/\pi$.

Имеем

$$\begin{aligned} e(L, H_{2,\beta}, I) &= \sup_{f \in H_{2,\beta}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) B(t) p(t) dt \right| \\ &= \sup_{f \in H_{2,\beta}} \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f(\xi) \overline{g_t(\xi)} d\xi B(t) p(t) dt \right| \\ &= \sup_{f \in H_{2,\beta}} \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f(\xi) \int_{\mathbb{T}} \overline{g_t(\xi)} B(t) p(t) dt d\xi \right| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_{2,\beta}} \leq 1} (f, G)_{\mathcal{H}_{2,\beta}}, \end{aligned}$$

где

$$G(\xi) = \frac{2K}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{dn} \left(\frac{K}{\pi}(t - \xi) \right) B(t) p(t) dt.$$

Отсюда следует, что

$$g_{B,2}(z) = \frac{G(z)}{\|G\|_{\mathcal{H}_{2,\beta}}}.$$

Теорема 4. Пусть ν_1, \dots, ν_n — четные числа и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда квадратурная формула

$$(19) \quad \int_{\mathbb{T}} f(t) p(t) dt \approx \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} a_{j\nu} f^{(\nu)}(x_j),$$

где

$$a_{j\nu} = \int_{\mathbb{T}} c_{j\nu}(t) p(t) dt,$$

$$c_{j\nu}(t) = \frac{K}{\pi} \frac{B(t)g_{B,p}(t)}{\nu!(\nu_j - \nu - 1)!} \times \lim_{z \rightarrow x_j} \left(\frac{(z - x_j)^{\nu_j}}{B(z)g_{B,p}(z)} \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi}(t - z), k \right) \right)^{(\nu_j - \nu - 1)},$$

$$\operatorname{ctn}(z, k) = \frac{\operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{sn}(z, k)},$$

является оптимальным методом интегрирования на классе $H_{p,\beta}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$(20) \quad Jf := \frac{K}{\pi} B(t)g_{B,p}(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{B(z)g_{B,p}(z)} \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi}(z - t), k \right) dz,$$

где Γ_ε — граница прямоугольника $-\varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi - \varepsilon$, $|\operatorname{Im} z| \leq \beta$, а ε выбрано из условия, чтобы точки x_1, \dots, x_n лежали внутри этого прямоугольника. В силу того, что функция $g_{B,p}(z)$ не имеет нулей в полосе S_β , по теореме о вычетах получаем

$$Jf = f(t) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(t) f^{(\nu)}(x_j).$$

Из свойств эллиптических функций (см., например, [20]) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi}(t \pm i\beta), k \right) &= \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi}t \pm i \frac{K'}{2}, k \right) \\ &= \pm i(1+k) \frac{1 - k \operatorname{sn}^2 \left(\frac{K}{\pi}t, k \right)}{1 + k \operatorname{sn}^2 \left(\frac{K}{\pi}t, k \right)} = \pm i \frac{\Lambda}{K} \operatorname{dn} \left(\frac{\Lambda}{\pi}t, \lambda \right), \end{aligned}$$

где $\lambda = 2\sqrt{k}/(1+k)$, а Λ — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ (иначе говоря, λ определяется из условия $\Lambda'/\Lambda = K'/(2K)$). Тем самым интеграл (20) может быть записан в виде

$$Jf := B(t)g_{B,p}(t) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{B(z)g_{B,p}(z)} K_\beta(\operatorname{Re} z - t) dz,$$

где $\Gamma = [i\beta, 2\pi + i\beta] \cup [-i\beta, 2\pi - i\beta]$. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда для погрешности квадратурной формулы (19) имеем оценку

$$\begin{aligned} R_f &:= \left| \int_{\mathbb{T}} f(t)p(t) dt - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} a_{j\nu} f^{(\nu)}(x_j) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} B(t)g_{B,p}(t)p(t) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(z)|}{|g_{B,p}(z)|} K_{\beta}(\operatorname{Re} z - t) dz dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(z)|}{|g_{B,p}(z)|} \int_{\mathbb{T}} B(t)g_{B,p}(t) K_{\beta}(\operatorname{Re} z - t)p(t) dt dz. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (18), получаем

$$R_f \leq e(L, H_{p,\beta}, I) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |f(z)| |g_{B,p}(z)|^{p-1} dz.$$

По неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} R_f &\leq e(L, H_{p,\beta}, I) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |f(z)|^p dz \right)^{1/p} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |g_{B,p}(z)|^p dz \right)^{(p-1)/p} \\ &\leq e(L, H_{p,\beta}, I). \end{aligned}$$

Если $p = \infty$, то $g_{B,p}(z) \equiv 1$ и

$$|Jf| \leq B(t) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |f(z)| K_{\beta}(\operatorname{Re} z - t) dz \leq B(t),$$

поскольку

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} K_{\beta}(\operatorname{Re} z - t) dz \equiv 1.$$

Следовательно,

$$R_f \leq \int_{\mathbb{T}} B(t)p(t) dt = e(L, H_{\infty,\beta}, I).$$

□

§4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ H_p^r ПО ТЕЙЛОРОВСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in D$, на классе H_p^r по значениям информационного оператора

$$If = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0)).$$

Погрешность оптимального метода восстановления обозначим в этом случае через $e(\xi, H_p^r, I)$.

Нетрудно убедиться, что если $f \in H_p^r$ и $If = 0$, то $f^{(r)}(z) = z^n \varphi(z)$, где $\varphi \in H_p$. Следовательно, $f(z) = T_r(t^n \varphi(t))(z)$, где оператор T_r определен равенством (7). Очевидно, что и при всех $\varphi \in H_p$

функция $f(z) = T_r(t^n \varphi(t))(z) \in H_p^r$, причем $If = 0$. Тем самым, учитывая соотношение двойственности (2),

$$(21) \quad e(\xi, H_p^r, I) = \sup_{\substack{f \in H_p^r \\ If=0}} |f(\xi)| = \sup_{\varphi \in H_p} \left| \int_0^\xi \frac{(\xi - t)^{r-1}}{(r-1)!} t^n \varphi(t) dt \right|.$$

Пусть $\xi \in (0, 1)$. Тогда из [11, стр. 176] следует, что существует единственная функция $\varphi_\xi \in H_p$ такая, что $\varphi_\xi(t) > 0$ при $t \in (-1, 1)$ и

$$(22) \quad e(\xi, H_p^r, I) = \int_0^\xi \frac{(\xi - t)^{r-1}}{(r-1)!} t^n \varphi_\xi(t) dt.$$

Теорема 5. При всех $\xi \in D$ и $1 \leq p \leq \infty$ метод

$$(23) \quad f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0),$$

где $a_0 = \dots = a_{r-1} = 1$,

$$(24) \quad a_{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \varphi_{|\xi|}(0)} h_{n+r-1},$$

$$a_k = \frac{k!}{(k-r)! \varphi_{|\xi|}(0)} \left(h_k - \sum_{j=k+1}^{n+r-1} a_j \frac{(j-r)!}{j!(j-k)!} |\xi|^{j-k} \varphi_{|\xi|}^{(j-k)}(0) \right),$$

$$k = n+r-2, \dots, r,$$

$$h_k = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} \tau^{k-r} (1 - (|\xi|\tau)^{2(n+r-k)}) \varphi_{|\xi|}(|\xi|\tau) d\tau,$$

$$k = r, \dots, n+r-1,$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p^r .

Доказательство. Обозначим через $H_p^{r, \mathbb{R}}$ класс всех функций из H_p^r , вещественных на интервале $(-1, 1)$. Покажем сначала, что метод (23) является оптимальным на классе $H_p^{r, \mathbb{R}}$ при $\xi \in (0, 1)$. Так как $\varphi_\xi \in H_p^{\mathbb{R}}$, то равенство (22) справедливо и для класса $H_p^{r, \mathbb{R}}$, то есть функция

$$(25) \quad f_0(z) := \int_0^z \frac{(z-t)^{r-1}}{(r-1)!} t^n \varphi_\xi(t) dt$$

является экстремальной в задаче восстановления значения $f(\xi)$ на классе $H_p^{r, \mathbb{R}}$ по тейлоровской информации If .

Положим $\omega_0(z) := 1$,

$$\omega_j(z) := \frac{z\omega_{j-1}(z) + \varepsilon_{n+r-j}}{1 + \varepsilon_{n+r-j}z\omega_{j-1}(z)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

При всех $\varepsilon_r, \dots, \varepsilon_{n+r-1} \in (-1, 1)$ функция $\omega_n \varphi_\xi \in H_p^\mathbb{R}$. Рассмотрим для точек $P = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+r-1}) \in \mathbb{R}^{n+r}$ функцию

$$f_P(z) := \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon_j z^j + T_r(\omega_n \varphi_\xi)(z).$$

При всех $P \in (-1, 1)^{n+r}$ $f_P \in H_p^r$, а при $P = 0$ эта функция совпадает с экстремальной функцией (25). Из теоремы 1 следует, что коэффициенты a_j оптимального метода восстановления на классе $H_p^{r,\mathbb{R}}$, находятся из системы

$$\sum_{j=0}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} \frac{\partial f_P^{(j)}(0)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{P=0} = \frac{\partial f_P(\xi)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{P=0}, \quad k = 0, 1, \dots, n+r-1.$$

Имеем при $0 \leq k \leq r-1$

$$\frac{\partial f_P^{(j)}(0)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{P=0} = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ j!, & k = j, \end{cases} \quad \frac{\partial f_P(\xi)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{P=0} = \xi^k,$$

а при $r \leq k \leq n+r-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_P^{(j)}(0)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{P=0} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq k-1, \\ C_{j-r}^{k-r} (k-r)! \varphi_\xi^{(j-k)}(0), & k \leq j \leq n+r-1, \end{cases} \\ \frac{\partial f_P(\xi)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{P=0} &= (T_r g_k)(\xi), \end{aligned}$$

где

$$g_k(z) = z^{k-r} (1 - z^{2(n+r-k)}) \varphi_\xi(z).$$

Отсюда $a_0 = \dots = a_{r-1} = 1$, а для определения остальных коэффициентов получаем систему

$$\sum_{j=k}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} C_{j-r}^{k-r} (k-r)! \varphi_\xi^{(j-k)}(0) = (T_r g_k)(\xi), \quad k = r, \dots, n+r-1.$$

Таким образом,

$$a_{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \varphi_\xi(0)} \frac{(T_r g_{n+r-1})(\xi)}{\xi^{n+r-1}},$$

$$a_k = \frac{k!}{(k-r)! \varphi_\xi(0)} \left(\frac{(T_r g_k)(\xi)}{\xi^k} - \sum_{j=k+1}^{n+r-1} a_j \frac{(j-r)!}{j!(j-k)!} \xi^{j-k} \varphi_\xi^{(j-k)}(0) \right),$$

$k = n+r-2, \dots, r.$

Сделав замену $t = \xi \tau$, получим, что $(T_r g_k)(\xi) = \xi^k h_k$, и следовательно, имеют место равенства (24).

Оптимальность построенного метода на классе H_p^r доказывается приемом, аналогичным тому, который использовался при доказательстве теоремы 2.

Пусть теперь ξ — произвольная точка диска D . Если $\xi = |\xi|e^{i\theta}$ и $f \in H_p^r$, то функция $F(z) = f(ze^{i\theta})$ принадлежит классу H_p^r , $F(|\xi|) = f(\xi)$ и

$$IF = (f(0), e^{i\theta}f'(0), \dots, e^{i(n+r-1)\theta}f^{(n+r-1)}(0)).$$

Применяя построенный метод к функции F в точке $|\xi|$, получим, что

$$\left| f(\xi) - \sum_{j=0}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0) \right| \leq e(|\xi|, H_p^r, I).$$

Используя первое из равенств (21), легко убедиться, что

$$e(|\xi|, H_p^r, I) = e(\xi, H_p^r, I).$$

Тем самым построенный метод является оптимальным при всех $\xi \in D$. \square

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.
- [2] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.
- [3] Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [4] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50 №6. С. 85–93.
- [6] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19. №1. С. 29–40.
- [7] Осипенко К. Ю. Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192. С. 67–86.
- [8] Bojanov B. D. Best quadrature formula for a certain class of analytic functions. Zastos. Mat. 1974. V. 14, P. 441–447.
- [9] Осипенко К. Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, №1. С. 79–99.
- [10] Осипенко К. Ю. Об n -поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, №4. С. 55–79.
- [11] Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Functions. Huntington, New York: Nova Science Publ., Inc., 2000.
- [12] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12. №4. С. 465–476.

- [13] *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n -width of sets of analytic functions // *Duke Math.* 1980. V. 47. №4. P. 789–801.
- [14] *Farkov Yu. A.* The N -widths of Hardy–Sobolev spaces of several complex variables // *J. Approx. Theory.* 1993. V. 75. №2. P. 183–197.
- [15] *Fisher S. D.* Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions // *Constr. Approx.* 1989. V. 5. №2. P. 171–187.
- [16] *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1974. Т. 38, №3. С. 583–614.
- [17] *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М: Наука, 1979.
- [18] *Osipenko K. Yu., Wilderotter K.* Optimal information for approximating periodic functions // *Math. Comput.* 1997 V. 66. №220. P. 1579–1592.
- [19] *Osipenko K. Yu.* Exact values of n -widths of Hardy–Sobolev classes // *Constr. Approx.* 1997. V. 13. P. 17–27.
- [20] *Ахизер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- [21] *Wilderotter K.* Optimal approximation of periodic analytic functions with integrable boundary values // *J. Approx. Theory.* 1996 V. 84. №2. P. 236–246.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО