КВАНТ · 2002/№2

Бревно в шалаше

К.ОСИПЕНКО, А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

В ПРЕДЫДУЩЕМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА ТЕЧЕНИЕ этой статьи прервалось в том месте, где было выведено уравнение астроиды:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1.$$

Вот несколько упражнений.

Упражнения

9. Найдите длину кратчайшего отрезка с концами на осях координат, проходящего через точку $(a; b)$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

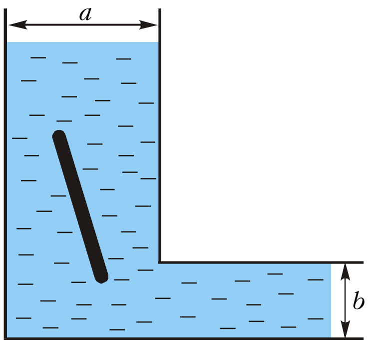

Рис.22

10. Канал, берега которого – параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причем до поворота его ширина равна a, после поворота – b (рис.22). При каких d через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины d?

11. Рассмотрим круг диаметра 1, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2. Нарисуем траекторию какой-то точки катящейся окружности (рис.23). Докажите, что получится астроида.

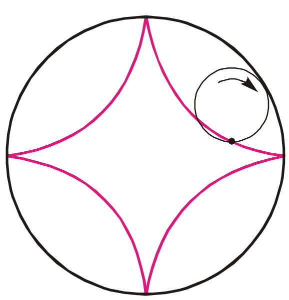

Рис.23

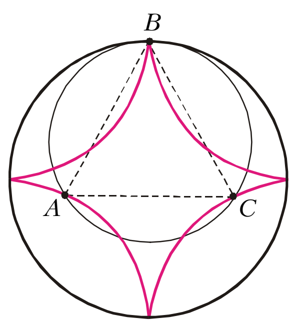

Рис.24

12. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в круг диаметра 3, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2 (рис.24). Докажите, что точки A, B и C движутся по одной и той же кривой – астроиде.

Нормали к эллипсу

Очень красива огибающая для семейства нормалей к эллипсу. Эллипс, как известно, можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нормаль к эллипсу найти легко, если эллипс задать параметрически:

$$(x; y)=(a\cos\varphi; b\sin\varphi).$$

(Это аналогично тому, как единичную окружность можно задать и уравнением $x^2+y^2=1$, и параметрически: $(x; y)=(\cos\varphi; \sin\varphi)$. Обдумайте это, если вы не встречались с этим раньше!)

Итак, x и y – функции параметра φ. Вычислим производные: $(x'; y')=(-a\sin\varphi; b\cos\varphi)$. Если отложить вектор с такими координатами от точки $(x; y)$, то получим вектор, касающийся эллипса. (Как всякий вектор скорости, сказал бы физик.)

Легко проверить, что если вектор $(\alpha; \beta)$ отличен от нулевого вектора и перпендикулярен прямой l, проходящей через точку с координатами $(m; n)$, то прямую l можно задать уравнением $\alpha x+\beta y=\alpha m+\beta n$. (Докажите это!)

Поэтому уравнение нормали можно записать в виде

$$yb\cos\varphi-xa\sin\varphi=\left(b^2-a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Теперь мы рассмотрим близкую к φ величину ψ (чтобы в конце концов перейти к пределу $\psi\to\varphi$) и составим систему уравнений

$$\begin{cases} yb\cos\varphi-xa\sin\varphi=\left(b^2-a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi, \\ yb\cos\psi-xa\sin\psi=\left(b^2-a^2\right)\sin\psi\cos\psi. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на $\sin\psi$, второе – на $\sin\varphi$ и вычтя первое уравнение из второго, получим

$$yb(\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi)=$$

$$=\left(a^2-b^2\right)(\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi-\sin\psi\cos\psi\sin\varphi),$$

откуда

$$yb\sin(\varphi-\psi)=\left(a^2-b^2\right)\sin\varphi\sin\psi(\cos\varphi-\cos\psi).$$

Чтобы удобнее было перейти к пределу, перепишем это равенство следующим образом:

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin\varphi\sin\psi\frac{\cos\varphi-\cos\psi}{\varphi-\psi}\cdot\frac{\varphi-\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Последний множитель стремится к 1 (это так называемый первый замечательный предел). Предпоследний множитель стремится к производной косинуса в точке φ. Значит, в пределе (при $\psi\to\varphi$) получаем

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^2\varphi(-\sin\varphi),$$

Окончание. Начало см.в «Кванте» №1.

т.е. $y = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi$. Аналогично, $x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi$. (Проверьте это!)

Итак, мы нашли огибающую:

$$(x;\ y) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi;\ \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi\right).$$

Легко убедиться, что кривая, заданная этим параметрическим уравнением, может быть задана уравнением без параметра:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}.$$

Эту кривую тоже называют астроидой.

Упражнения

13. Докажите, что прямая, заданная уравнением $yb\cos\varphi - xa\sin\varphi = \left(b^2 - a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi$, касается в точке $\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi;\ \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi\right)$ кривой, заданной уравнением $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}$.

14. Если $a^2 \neq b^2$, то из точек астроиды $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}$, кроме вершин четырех ее «клювов», к эллипсу можно провести три перпендикуляра, из точек внешней области и из вершин «клювов» – два, а из точек внутренней области – четыре перпендикуляра. Докажите это.

15. Нарисуйте, как выглядит огибающая семейства нормалей к гиперболе, заданной уравнением $xy = 1$.

16. Огибающей для семейства нормалей к циклоиде – кривой, заданной параметрически формулами $x = \pi rt - r\sin t$ и $y = r - r\cos t$, где $r > 0$, – является циклоида, сдвинутая на $2r$ вниз и на πr вправо. Докажите это.

Вишенка в бокале

Завершит подготовку к решению задачи о максицилиндре задача, которую в 1994 году предложил Н.Б.Васильев одиннадцатиклассникам – участникам Московской математической олимпиады:

Задача. *Вишенка имеет форму шара радиуса r. Внутренняя поверхность бокала получена вращением кривой $z = x^4$ вокруг оси аппликат. Найдите наибольшее возможное r, при котором вишенка может лежать в бокале и касаться его поверхности в начале координат.*

Решение. Рассмотрим плоскую задачу. Запишем уравнение окружности радиуса r с центром в точке $(0;\ r)$:

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

т.е. $x^2 - 2ry + y^2 = 0$. Эта окружность и график $y = x^4$ должны иметь лишь одну общую точку – начало координат. Подставим значение y в уравнение:

$$x^2 - 2rx^4 + x^8 = 0.$$

Значит, $x = 0$ или

$$x^6 - 2rx^2 + 1 = 0.$$

Значению $x = 0$ соответствует начало координат. Чтобы вишенка касалась дна бокала, последнее уравнение не должно иметь корней. (Разберитесь в этом самостоятельно!) Записав его в виде

$$r = \frac{x^6 + 1}{2x^2}$$

и построив график функции $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2}$ (рис.25), видим, что задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции. Дифференцируем:

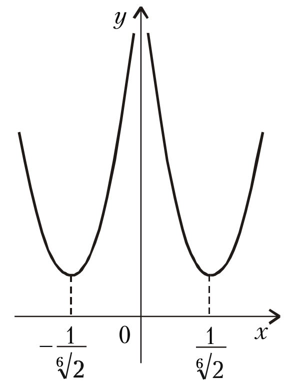

Рис.25

$$\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2}\right)' = 2x^3 - \frac{1}{x^3},$$

так что производная обращается в ноль в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$; наименьшее значение функции равно

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^6 + 1}{2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Это и есть максимальный радиус вишенки.

Есть и другой способ решения задачи о вишенке. Для положительного числа r рассмотрим квадрат расстояния от точки $(0;\ r)$ до точки $\left(x;\ x^4\right)$ и продифференцируем полученную функцию:

$$f(x) = x^2 + \left(x^4 - r\right)^2,$$

$$f'(x) = 2x + 8x^3\left(x^4 - r\right).$$

Производная равна нулю, если $x = 0$ или

$$4x^6 - 4rx^2 + 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$r = x^4 + \frac{1}{4x^2}.$$

Чтобы вишенка помещалась в бокал, должно быть выполнено неравенство

$$f(x) \geq r^2,$$

т.е.

$$x^2 + \left(x^4 - \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)\right)^2 \geq \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)^2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + \frac{1}{16x^4} \geq x^8 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16x^4},$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} \geq x^8.$$

Значит, $|x| \leq \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$. Дальнейшие рассуждения (при желании) читатель легко проведет самостоятельно. (Полезно рассмотреть график функции $y = x^4 + \frac{1}{4x^2}$, найти точку минимума $x = 1/\sqrt{2}$ и понять, что значениям $x \geq 1/\sqrt{2}$ соответствуют точки локального минимума, а значениям $x < 1/\sqrt{2}$ – точки локального максимума функции $f(x)$.)

Решение задачи о лежачем цилиндре

Тренировка закончена. Пора заняться давно обещанным делом – в данный конус (шалаш) радиуса R и высоты H вписать лежачий цилиндр (бревно) максимального объема. Поместим начало координат в центр основания конуса, а ось Oz направим в вершину конуса. Тогда для любой точки $(x; y; z)$ боковой поверхности конуса имеем:

$$\frac{H}{R} = \frac{H - z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Обозначив $k = H/R$, получаем

$$k^2\left(x^2 + y^2\right) = (H - z)^2.$$

Несложно записать и уравнение окружности радиуса r с центром $(x; 0; r)$, которая ограничивает основание «лежачего» цилиндра:

$$y^2 + (z - r)^2 = r^2,$$

т.е. $y^2 = 2rz - z^2$. Значит, координаты точки пересечения этой окружности с боковой поверхностью конуса удовлетворяют уравнению

$$k^2\left(x^2 + 2rz - z^2\right) = (H - z)^2.$$

Как помните, есть два случая: при достаточно больших x величина r маленькая и окружность касается боковой поверхности конуса в точке $(x; 0; k(R - x))$, а при маленьких x касание происходит не в одной точке, а в двух. Рассмотрим эти случаи по очереди.

В первом случае $2r = k(R - x)$ и

$$V = \pi \cdot 2x \cdot \left(\frac{k(R - x)}{2}\right)^2 = \pi k^2 x (R - x)^2 / 2.$$

Производную функции $f(x) = x(R - x)^2$ мы уже вычисляли. И нулю ее уже приравнивали. Поэтому мы знаем, что функция f на интервале $(0; R)$ имеет максимум в точке $R/3$. Если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в одной точке, то *среди всех лежачих цилиндров* максимальный объем имеет тот, высота которого равна $2x = 2R/3$, радиус основания равен $r = H/3$, а объем равен

$$V = 2\pi H^2 R/27.$$

Обратите особое внимание на слова «среди всех лежачих цилиндров». Не среди «всех цилиндров первого случая», а среди всех! Дело в том, что и в первом, и во втором случае $r \leq k(R - x)/2$ и поэтому $V \leq \pi k^2 x (R - x)^2 / 2$. (Обдумайте это!)

А если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, то мы вынуждены разбирать второй случай. Уравнение

$$k^2\left(x^2 + 2rz - z^2\right) = (H - z)^2$$

можно записать в виде

$$z^2\left(1 + k^2\right) - 2\left(H + rk^2\right)z + \left(H^2 - k^2x^2\right) = 0.$$

Окружность касается боковой поверхности, когда это квадратное уравнение имеет кратный корень, т.е. когда его дискриминант D равен нулю. (Подумайте, почему!) Итак,

$$\frac{D}{4} = \left(kR + k^2r\right)^2 - \left(1 + k^2\right)\left(k^2R^2 - k^2x^2\right) = 0,$$

откуда

$$(R + kr)^2 = \left(1 + k^2\right)\left(R^2 - x^2\right)$$

и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{\left(1 + k^2\right)\left(R^2 - x^2\right)} - R}{k}.$$

Если дискриминант уравнения равен нулю, то найти его корень легко: $z = \left(H + rk^2\right)/\left(1 + k^2\right)$. Разумеется, должно быть выполнено неравенство $0 \leq y^2 = 2rz - z^2$, т.е. $z \leq 2r$. Подставив в это неравенство только что найденные значения z и r и поупражнявшись в алгебраических преобразованиях, получим в конце концов

$$x \leq \frac{k^2R}{2 + k^2}.$$

Обозначив для краткости $d = k^2R/\left(2 + k^2\right)$, мы видим, что при $x \in [d, R)$ окружность касается боковой поверхности конуса одной точкой, а при $x \in (0; d)$ – двумя. Неравенство

$$d \leq \frac{R}{3}$$

выполнено, как легко проверить, при $k \leq 1$. Поэтому мы уже нашли ответ ($V = 2\pi H^2 R/27$) при $k \leq 1$ (т.е. при $H \leq R$).

Осталось разобрать случай $k > 1$. Когда окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, объем цилиндра равен

$$V = 2\pi x \left(\frac{\sqrt{\left(1 + k^2\right)\left(R^2 - x^2\right)} - R}{k}\right)^2.$$

Продифференцируем функцию

$$f(x)=x\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}-R\right)^2$$

и приравняем производную к нулю:

$$\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}-R\right)^2-$$

$$-2\frac{x^2\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}}\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}-R\right)=0,$$

откуда

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)-R\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}=2x^2\left(1+k^2\right),$$

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-3x^2\right)=R\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}, \quad (*)$$

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-3x^2\right)^2=R^2\left(R^2-x^2\right),$$

$$9\left(k^2+1\right)x^4-\left(6k^2R^2+5R^2\right)x^2+k^2R^4=0,$$

$$x^2=R^2\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}.$$

Если в последней формуле взять знак плюс, то вследствие неравенства $\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}>\frac{1}{3}$ получаем, что в правой части формулы $(*)$ стоит отрицательное число, а в левой – положительное. Значит, надо брать знак минус.

Как выглядит график функции $V(x)$? Поскольку функция $r(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $(0;\ R)$, в том числе в точке $x=d$, то функция $V(x)$ тоже всюду дифференцируема на интервале $(0;\ R)$. Легко понять, что функция не может иметь график вроде изображенного на рисунке 26, а имеет единственную точку максимума (рис.27).(Впрочем, можно обойтись и без апелляции к рисункам 26 и 27

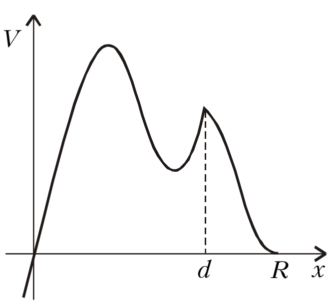

Рис.26

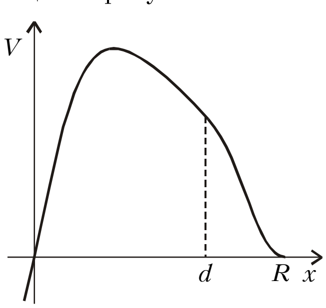

Рис.27

и дифференцируемости функции $V(x)$. А именно, при $k>1$ имеем $\frac{R}{3}<d$ и, как можно доказать, $R\sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}}<d$. Поэтому функция $V(x)$ на $(0;\ d)$ имеет единственную точку максимума, а на $[d;\ R)$ монотонно убывает.)

Таким образом, при $k\ge 1$ максимум объема достигается при

$$x=R\sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}}.$$

Теперь легко выписать ответ. При $H\le R$ максимальный объем лежачего цилиндра равен $\frac{2}{27}\pi RH^2$, а при $R\le H$ максимальный объем V равен

$$\frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}-3\sqrt{2}R\right)^2}{9H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Поскольку

$$12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{24H^2+25R^2}+R\right)^2}{2},$$

последнюю формулу можно упростить:

$$V=\frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{24H^2+25R^2}-5R\right)^2}{18H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Задача о лежачем цилиндре решена!

Упражнение 17. Найдите максимально возможный объем, высоту и радиус основания лежачего цилиндра, вписанного в данный стоячий цилиндр, если радиус основания стоячего цилиндра равен R, а высота не меньше $2R\sqrt{2/3}$.

Что лучше – лежать или стоять?

Впишем в данный конус лежачий и стоячий цилиндры максимально возможных объемов. Интересно, какой будет больше?

При $H\le R$ ответ на этот вопрос получить легко:

$$\frac{2}{27}\pi RH^2\le\frac{2}{27}\pi R^2H=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{27}\pi R^2H,$$

так что объем лежачего бревна как минимум вдвое меньше объема максимального стоячего бревна.

При $H\ge R$ отношение объемов равно

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{\left(\sqrt{24k^2+25}-5\right)^2}{k^2\sqrt{6k^2+5+\sqrt{24k^2+25}}},$$

где $k=H/R$.

Упражнение 18. Докажите, что при $H\ge R$ отношение максимальных объемов лежачего и стоячего цилиндров не превосходит $2\sqrt{2}/3$, причем значение $2\sqrt{2}/3$ достигается при $k=\sqrt{6}$.

Не бревно для шалаша, а шалаш для бревна

Интересно, а если не в шалаш засовывать максимальное бревно, а наоборот, строить шалаш для бревна? Другими словами, поставим задачу: *описать конус вокруг цилиндра высоты 2h и радиуса основания r так, чтобы образующая цилиндра была параллельна плоскости основания конуса, а объем конуса был минимальным.*

Мы приведем только краткий набросок решения, оставив часть вычислений и обоснований читателю. Вспомним выведенные выше формулы, не забыв заменить k на H/R и x на h.

Имеем:

$$2r = H(R-h)/R$$

при $h \in [d; R)$, т.е. при

$$h \geq \frac{RH^2}{2R^2 + H^2};$$

далее,

$$\left(R + \frac{H}{R} \cdot r\right)^2 = \left(1 + \frac{H^2}{R^2}\right)\left(R^2 - h^2\right)$$

при $h \leq RH^2/\left(2R^2 + H^2\right)$.

В случае равенства $h = d$ имеем

$$2r = \frac{H(R-h)}{R} = H\left(1 - \frac{h}{R}\right) = H\left(1 - \frac{H^2}{2R^2 + H^2}\right) = \frac{2HR^2}{2R^2 + H^2};$$

значит,

$$\frac{r}{h} = \frac{HR^2}{RH^2} = \frac{R}{H},$$

так что $R = H \cdot \dfrac{r}{h}$. Тогда, поскольку $h = d$, находим

$$h = \frac{RH^2}{2R^2 + H^2} = \frac{H \cdot \frac{r}{h} \cdot H^2}{2H^2 \cdot \frac{r^2}{h^2} + H^2} = \frac{Hrh}{2r^2 + h^2},$$

откуда

$$H = \frac{2r^2 + h^2}{r} = 2r + \frac{h^2}{r}.$$

Итак,

$$R = \begin{cases} \dfrac{hH}{H - 2r}, & \text{если } 2r < H \leq 2r + \dfrac{h^2}{r}; \\ \dfrac{H\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{H^2 - 2rH - h^2}}, & \text{если } H \geq 2r + \dfrac{h^2}{r}. \end{cases}$$

Утроенный объем конуса равен

$$3V(H) = HR^2.$$

Поэтому надо рассмотреть две функции: $f(H) = \dfrac{H^3h^2}{(H - 2r)^2}$ и $g(H) = \dfrac{H^3\left(r^2 + h^2\right)}{H^2 - 2rH - h^2}$. Производная первой из них равна нулю при $H = 3r$. А производная второй обращается в ноль, если

$$H^2 - 4rH - 3h^2 = 0.$$

На основании этого можно получить ответ: минимальный объем конуса равен

$$\frac{9\pi rh^2}{2} \text{ при } h \geq 2r$$

и

$$\frac{\pi\left(r^2 + h^2\right)\left(2r + \sqrt{4r^2 + 3h^2}\right)^3}{6\left(h^2 + 2r^2 + r\sqrt{4r^2 + 3h^2}\right)} \text{ при } h \leq 2r.$$

Упражнение 19. Рассмотрим конус и впишем в него а) стоячий; б) лежачий цилиндр максимального объема. Верно ли, что для полученного цилиндра исходный конус будет конусом минимального объема (из всех конусов с той же осью и той же плоскостью основания)?

Задачи для размышления

Задача о минимальном объеме конуса решена. Тем не менее, остался ряд нерешенных задач. Если вам удастся решить одну из следующих (или аналогичных им) задач – сообщите об этом в редакцию журнала!

1. Цилиндр объема V расположен в конусе объема W. Верно ли, что $V/W \leq 2/9$?

2. Дан «лежащий на боку» цилиндр, радиус основания которого равен r, а высота – h. Найдите описанный «стоячий» конус, площадь боковой поверхности которого минимальная из возможных.

3. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в цилиндре, радиус основания которого равен r, а высота – h.

4. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в конусе, радиус основания которого равен r, а высота – h, если требуется, чтобы а) вершина внутреннего конуса лежала в центре основания внешнего конуса; б) одна из образующих внутреннего конуса лежала на основании внешнего конуса.

5. Найдите наибольший радиус круга, который можно разместить в конусе с радиусом основания R и высотой H.