

НАИЛУЧШАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВА, ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРОГО ИЗВЕСТНЫ ПРИБЛИЖЕННО

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, Е. О. СИВКОВА

В работе решается задача о наилучшем (в точно определенном смысле) приближении с фиксированной точностью периодических функций и функций на прямой соответственно по неточно заданному конечному набору их коэффициентов Фурье и преобразованию Фурье на произвольном множестве конечной меры.

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, преобразование Фурье, соболевский класс, экстремальная задача

ВВЕДЕНИЕ

Начнем с общей постановки задачи о наилучшем приближении с фиксированной точностью элементов данного класса при условии, что сами элементы известны приближенно. Пусть X — векторное пространство, W — непустое подмножество (класс) элементов в X . Пусть, далее, Y — нормированное пространство, $I: X \rightarrow Y$ — линейный оператор и $\delta \geq 0$. Элементы из W известны приближенно, а именно, о каждом элементе $x \in W$ известен (мы “наблюдаем”) элемент $y \in Y$ такой, что $\|Ix - y\|_Y \leq \delta$ (если $\delta = 0$, то известен элемент Ix). Таким образом, информация об элементах из W определяется тройкой (Y, I, δ) .

Восстановить по данной информации значения некоторого линейного оператора $T: X \rightarrow Z$ на классе W с фиксированной точностью — это значит предъявить метод восстановления $\varphi: Y \rightarrow Z$, дающий нужную точность (погрешность) приближения, которая определяется следующим образом

$$e(\delta, \varphi) = e(T, W, Y, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z.$$

Предположим, что пары (Y, I) можно выбирать из некоторого множества $\mathcal{I}$ и при этом каждой такой паре (Y, I) сопоставлено неотрицательное число $v(Y, I)$, называемое *объемом используемой информации*. Нас интересует вопрос: какой минимальный объем информации нужен, чтобы по ней можно было восстановить значения оператора T на классе W с погрешностью, не превосходящей

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№13-01-12447, 14-01-00456, 14-01-00744).

заданного числа ε ? Точнее, обозначая через $\Phi(Y)$ множество всех отображений из Y в Z , требуется для данных $\varepsilon > 0$ и $\delta \geq 0$ найти величину

$$V(\varepsilon, \delta) = \inf \{ v(Y, I) \mid \exists (\varphi, (Y, I)) \in \Phi(Y) \times \mathcal{I} : e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon \}$$

и те наборы $(\hat{\varphi}, (\hat{Y}, \hat{I}))$, на которых нижняя грань достигается. Такие наборы будем называть *оптимальными*.

Если множество тех $(\varphi, (Y, I)) \in \Phi(Y) \times \mathcal{I}$, для которых $e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon$, пусто, то полагаем $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$, и это означает, что по данной информации нельзя восстановить элементы из W с заданной точностью.

Истоки данной постановки восходят к понятию ε -энтропии множества, величине, характеризующей наилучшее с точностью до ε приближение множества конечным числом элементов (см., например, [1]). Сама постановка является в определенном смысле обратной к задаче об оптимальном восстановлении функций из данного класса по их неточно заданному спектру. Подобные задачи рассматривались в ряде работ авторов. Отметим здесь работы [2]–[7].

1. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть n — натуральное и $W_2^n(\mathbb{T})$ — соболевский класс 2π -периодических функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$ -ая производная абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$, где

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Коэффициенты Фурье $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ задаются формулами

$$c_j = c_j(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-ijt} dt, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Ставится следующая задача. Пусть для любого конечного набора целых чисел имеется возможность измерить (точно или приближенно) коэффициенты Фурье каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ с номерами из данного набора. Мы хотим по этой информации восстановить сами элементы $x(\cdot)$ и их k -ую производную ($1 \leq k \leq n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{T})$ с фиксированной точностью, выбрав из всех таких наборов тот, который имеет минимальное число элементов.

Уточним постановку, приведя ее в соответствие с общей схемой. Пусть X — пространство 2π -периодических функций, у которых $(n-1)$ -ая производная абсолютно непрерывна, а n -ая производная принадлежит $L_2(\mathbb{T})$, $W = W_2^n(\mathbb{T})$, $Z = L_2(\mathbb{T})$. Каждому конечному набору α целых чисел сопоставим пару $(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha)$, где $N(\alpha)$ — число элементов в наборе, $l_\infty^{N(\alpha)}$ — пространство $\mathbb{C}^{N(\alpha)}$ векторов $y = (y_1, \dots, y_{N(\alpha)})$ с нормой $\|y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} = \max_{1 \leq i \leq N(\alpha)} |y_i|$ и $I_\alpha: X \rightarrow l_\infty^{N(\alpha)}$ — линейный оператор, сопоставляющий функции

$x(\cdot)$ ее коэффициенты Фурье с номерами из набора α . Итак, в нашем случае $\mathcal{I}$ — это множество пар $(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha)$, занумерованное конечными подмножествами целых чисел, а информация $(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta)$ о функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ при $\delta = 0$ состоит в том, что мы знаем коэффициенты Фурье $x(\cdot)$ с номерами из α , а если $\delta > 0$, то мы располагаем $N(\alpha)$ числами, каждое из которых отличается от соответствующего коэффициента Фурье по модулю не более, чем на δ . Полагаем $v(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha) = N(\alpha)$.

Пусть $0 \leq k \leq n-1$, D^k — оператор k -го дифференцирования (D^0 — тождественный оператор) и $\varphi: l_\infty^{N(\alpha)} \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ — метод восстановления. Его погрешность, согласно общей схеме, имеет вид

$$\begin{aligned} e(\delta, \varphi) &= e(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi) = \\ &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}), y \in l_\infty^{N(\alpha)} \\ \|I_\alpha x(\cdot) - y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Интересующая нас величина в данном случае такова

$$V(\varepsilon, \delta) = \inf \{ N(\alpha) \mid \exists (\varphi, (l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha)) \in \Phi(l_\infty^{N(\alpha)}) \times \mathcal{I} : e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon \}.$$

Кроме того, нас интересуют такие $\hat{\alpha}$ и $\hat{\varphi}$, что на наборах $(\hat{\varphi}, (l_\infty^{N(\hat{\alpha})}, I_{\hat{\alpha}}))$ достигается нижняя грань. В этом случае мы говорим, что $\hat{\alpha}$ — оптимальный набор, а $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Положим при $\delta > 0$

$$N_\delta = \max \left\{ N \in \mathbb{Z}_+ \mid 2\delta^2 \sum_{j=0}^N j^{2n} < 1 \right\},$$

и $N_0 = +\infty$, а также для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$\varepsilon_m = \left(\frac{1}{(m+1)^{2(n-k)}} + 2\delta^2 \sum_{j=0}^m j^{2k} \left(1 - \left(\frac{j}{m+1} \right)^{2(n-k)} \right) \right)^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что если $\delta > 0$, то $1 = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_{N_\delta}$.

Теорема. Пусть n — натуральное, k — целое, $0 \leq k \leq n-1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда, если $\varepsilon \geq 1$ и $k \geq 1$, то $V(\varepsilon, \delta) = 0$. Если $\varepsilon \geq 1$ и $k = 0$, то $V(\varepsilon, \delta) = 1$, а оптимальное множество — $\alpha = \{0\}$. При $\varepsilon_m \leq \varepsilon < \varepsilon_{m-1}$, $m = 1, 2, \dots, N_\delta$,

$$V(\varepsilon, \delta) = \begin{cases} 2m+1, & k=0, \\ 2m, & k \geq 1. \end{cases}$$

Оптимальное множество —

$$\alpha = \begin{cases} \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}, & k=0, \\ \{\pm 1, \dots, \pm m\}, & k \geq 1. \end{cases}$$

Оптимальный метод имеет вид

$$\tilde{\varphi}(y)(t) = \sum_{|j| \leq m} (ij)^k \left(1 - \left(\frac{j}{m+1} \right)^{2(n-k)} \right) y_j e^{ijt}.$$

Если $\delta > 0$ и $\varepsilon < \varepsilon_{N\delta}$, то $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$.

Доказательство. Пусть α — набор целых чисел, $\delta \geq 0$ и $\varphi: l_\infty^{N(\alpha)} \rightarrow L_2(\mathbb{T})$.

1) Оценим снизу величину $e(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi)$. Сначала покажем, что она не меньше значения задачи

$$(1) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \rightarrow \max, \quad \|I_\alpha x(\cdot)\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1,$$

т. е. величины верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (1) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем

$$\begin{aligned} 2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} &\leq \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} + \|-x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\|I_\alpha x(\cdot)\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|I_\alpha x(\cdot) - y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta \\ y \in l_\infty^{N(\alpha)}, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), получаем требуемое.

2) Теперь оценим снизу значение задачи (1). В силу равенства Парсеваля квадрат ее значения равен значению такой задачи

$$(2) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2k} |c_j|^2 \rightarrow \max, \quad |c_j| \leq \delta, \quad j \in \alpha, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2n} |c_j|^2 \leq 1.$$

Далее считаем, что $k \geq 1$ (случай $k = 0$ рассматривается аналогично и проще). Для каждого $s \in \mathbb{N}$ обозначим $\Delta_s = \{\pm 1, \dots, \pm s\}$ и положим

$$\widehat{s} = \max\{s \in \mathbb{N} \mid \text{card}(\alpha \cap \Delta_s) = 2s\},$$

считая, что $\widehat{s} = 0$, если множество в фигурных скобках пусто. Далее, пусть

$$p_0 = \max\left\{p \mid 2\delta^2 \sum_{j=0}^p j^{2n} < 1, \quad 0 \leq p \leq \widehat{s}\right\}.$$

Рассмотрим последовательность c_j , $j \in \mathbb{Z}$, определенную следующим образом: если $p_0 < \widehat{s}$, то $c_j = \delta$ при $|j| \leq p_0$,

$$c_{p_0+1} = c_{-(p_0+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_0+1)^{-n} \sqrt{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}}$$

и $c_j = 0$ для остальных j . Если же $p_0 = \widehat{s}$, то ясно, что либо $p_0 + 1$, либо $-(p_0 + 1)$ не принадлежит α . Пусть m — то из этих чисел, которое не принадлежит α . Положим

$$c_m = (p_0+1)^{-n} \sqrt{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}},$$

$c_j = \delta$ при $|j| \leq p_0$ и $c_j = 0$ для остальных j . Определенная последовательность является допустимой в задаче (2). Действительно, если $p_0 < \widehat{s}$, то $|c_j| \leq \delta$, когда $|j| = p_0 + 1$, так как иначе

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p_0+1)^{-n} \sqrt{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}} > \delta \Leftrightarrow 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0+1} j^{2n} < 1,$$

что противоречит определению p_0 . Кроме того, очевидно, что $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2n} |c_j|^2 = 1$. Это равенство выполняется и когда $p_0 = \widehat{s}$.

Следовательно, значение задачи (2) не меньше, чем значение максимизируемого функционала на этой последовательности, т. е. не меньше величины

$$2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2k} + (p_0+1)^{-2(n-k)} \left(1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n} \right) = \varepsilon_{p_0}^2.$$

Отсюда и из предыдущего пункта вытекает, что

$$(3) \quad e(\delta, \varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi) \geq \varepsilon_{p_0}.$$

3) Покажем, что эта оценка достигается для метода

$$\widetilde{\varphi}(y)(t) = \sum_{|j| \leq p_0} (ij)^k \omega_j y_j e^{ijt},$$

где

$$\omega_j = 1 - \left(\frac{j}{p_0+1} \right)^{2(n-k)}, \quad |j| \leq p_0.$$

Квадрат погрешности этого метода равен, по определению, значению следующей экстремальной задачи

$$(4) \quad \sum_{|j| \leq p_0} j^{2k} |c_j - \omega_j y_j|^2 + \sum_{|j| > p_0} j^{2k} |c_j|^2 \rightarrow \max,$$

$$|c_j - y_j| \leq \delta_j, \quad j \in \alpha, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2n} |c_j|^2 \leq 1.$$

Оценим сверху ее значение. Положим

$$\lambda = (p_0 + 1)^{-2(n-k)}, \quad \lambda_j = j^{2k}\omega_j, \quad |j| \leq p_0.$$

Если $0 < |j| \leq p_0$, то по неравенству Коши–Буняковского (используя легко проверяемое равенство

$$j^{2k} \left(\frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \frac{(1 - \omega_j)^2}{j^{2n}\lambda} \right),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} j^{2k}|c_j - \omega_j y_j|^2 &= j^{2k}|\omega_j(c_j - y_j) + c_j(1 - \omega_j)|^2 \leq \\ &\leq j^{2k} \left(\frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \frac{(1 - \omega_j)^2}{j^{2n}\lambda} \right) (|c_j - y_j|^2 \lambda_j + |c_j|^2 \lambda j^{2n}) = \\ &= |c_j - y_j|^2 \lambda_j + |c_j|^2 \lambda j^{2n}. \end{aligned}$$

Если $|j| > p_0$, то, очевидно, $j^{2k} \leq \lambda j^{2n}$. Из полученных соотношений следует, что максимизируемый функционал в (4) оценивается сверху величиной

$$\sum_{|j| \leq p_0} |c_j - y_j|^2 \lambda_j + \lambda \sum_{|j| > p_0} j^{2n} |c_j|^2 \leq \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} \lambda_j + \lambda = \varepsilon_{p_0}^2.$$

Отсюда и (3) вытекает, что

$$(5) \quad e(\delta, \tilde{\varphi}) = \varepsilon_{p_0}.$$

4) Пусть $\varepsilon_m \leq \varepsilon < \varepsilon_{m-1}$ для некоторого $m \geq 1$. Тогда для набора $\alpha = \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ из (5) следует, что

$$e(0, \tilde{\varphi}) = \varepsilon_m \leq \varepsilon.$$

Предположим, что существует α и метод φ такие, что $N(\alpha) < 2m$ и $e(0, \varphi) \leq \varepsilon$. Тогда $\hat{s} \leq m$ и $p_0 \leq m - 1$. Следовательно, с учетом (3)

$$\varepsilon < \varepsilon_{m-1} \leq \varepsilon_{p_0} \leq e(0, \varphi) \leq \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, 0) = 2m$. Случай $\varepsilon \geq 1$ рассматривается аналогично.

Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon < \varepsilon_{N_\delta}$. В силу того, что для всех α $p_0 \leq N_\delta$, для любого метода

$$e(\delta, \varphi) \geq \varepsilon_{p_0} \geq \varepsilon_{N_\delta} > \varepsilon.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$. $\square$

2. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы рассматриваем функции на прямой. Пусть $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций $x(\cdot)$, у которых $(n - 1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$. Ставится следующая задача. Пусть для любого измеримого подмножества $\mathbb{R}$ конечной лебеговой меры имеется возможность измерить

(точно или приближенно) преобразование Фурье каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ на этом множестве. По этой информации мы хотим восстановить сами элементы $x(\cdot)$ и их k -ую производную ($1 \leq k \leq n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{R})$ с фиксированной точностью, выбрав из всех этих множеств то, которое имеет минимальную меру.

Уточним постановку, приведя ее в соответствие с общей схемой. Пусть X — пространство функций на $\mathbb{R}$, у которых $(n-1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна, а n -ая производная принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, $W = W_2^n(\mathbb{R})$, $Z = L_2(\mathbb{R})$ и пусть $F: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье. Каждому множеству $A \subset \mathbb{R}$ конечной лебеговой меры сопоставим пару $(L_2(A), I_A)$, где $I_A: X \rightarrow L_2(A)$ — линейный оператор, сопоставляющий функции $x(\cdot)$ функцию $Fx(\cdot)|_A$ — сужение $Fx(\cdot)$ на A . Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathcal{I}$ — это множество пар $(L_2(A), I_A)$, занумерованное подмножествами A конечной меры, а информация $(L_2(A), I_A, \delta)$ о функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ при $\delta = 0$ состоит в том, что мы знаем преобразование Фурье $x(\cdot)$ на A , а если $\delta > 0$, то мы знаем лишь функцию $y(\cdot) \in L_2(A)$ такую, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$. Полагаем $v(L_2(A), I_A) = \text{mes } A$.

Пусть, как и раньше, D^k — оператор k -го дифференцирования (D^0 — тождественный оператор), A — множество конечной меры и $\varphi: L_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — метод восстановления. Его погрешность, согласно общей схеме, имеет вид

$$e(\delta, \varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(A) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

и

$$V(\varepsilon, \delta) = \inf \{ \text{mes } A \mid \exists (\varphi, (L_2(A), I_A)) \in \Phi(L_2(A)) \times \mathcal{I} : e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon \}.$$

Если для $\hat{A}$ и $\hat{\varphi}$ на наборе $(\hat{\varphi}, (L_2(\hat{A}), I_{\hat{A}}))$ достигается минимум, то мы говорим, что $\hat{A}$ — оптимальное множество, а $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Теорема. Пусть n — натуральное, k — целое, $0 \leq k \leq n-1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-\frac{1}{n-k}}.$$

Оптимальное множество — отрезок $\hat{A} = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$, где $2\sigma_\varepsilon = V(\varepsilon, 0)$. Оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}(Fx(\cdot)|_{\hat{A}})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{A}} (i\xi)^k Fx(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Пусть $\delta > 0$. Если

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{2n}},$$

то $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$, а если

$$\varepsilon \geq \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{2n}},$$

то $V(\varepsilon, \delta) = 2\sigma_\varepsilon$, где σ_ε — единственный корень уравнения

$$\frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma_\varepsilon^{2k} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^{2(n-k)}} = \varepsilon^2.^1$$

Оптимальное множество — отрезок $\hat{A} = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$. Оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{A}} (i\xi)^k \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\xi}{\sigma_\varepsilon} \right)^{2n} \right)^{-1} y(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Отметим, что по точной информации ($\delta = 0$) о преобразовании Фурье можно восстановить элементы класса $W_2^n(\mathbb{R})$ с любой точностью, и наилучший метод восстановления k -производной ($0 \leq k \leq n-1$) “естественный” — надо взять k -ую производную (если $k \geq 1$) от обратного преобразования Фурье на отрезке $[-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$.

Если же $\delta > 0$, то уже не для всех ε можно восстановить функции и их k -ые производные с данной точностью, а для тех ε , для которых это возможно, оптимальный метод использует информацию только на отрезке $[-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$ и при этом ее предварительно “сглаживает”.

Доказательство. Пусть A — множество конечной меры в $\mathbb{R}$, $\delta \geq 0$ и $\varphi: L_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

1) Покажем сначала, что величина $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi)$ не меньше значения задачи

$$(6) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$$

(где $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$ при $\delta = 0$ означает, что $Fx(\cdot)|_A = 0$). Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (6) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем

$$\begin{aligned} 2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta \\ y(\cdot) \in L_2(A), \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (6), получаем требуемое.

¹Чтобы включить случай $k = 0$ считаем здесь, что $0^0 = 1$ и что $\infty^0 = 1$ в оптимальном методе ниже.

2) Положим

$$\widehat{a} = \sup\{a \geq 0 \mid \text{mes}\{A \cap [-a, a]\} = 2a\}$$

и покажем, что если $\widehat{a} = 0$, то значение задачи (6) равно бесконечности. Действительно, в образах Фурье квадрат значения этой задачи, согласно теореме Планшереля, равен значению такой задачи

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_A |Fx(\xi)|^2(\xi) d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Так как $\widehat{a} = 0$, то $\text{mes}\{M_\sigma \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\} < 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и значит, мера множества $\Omega_\varepsilon = \{(\mathbb{R} \setminus M_\sigma) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ положительна. Пусть функция $x_\varepsilon(\cdot)$ такова, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau \right)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon \\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (7) и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} \xi^{2k} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} \xi^{2n} \xi^{-2(n-k)} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau} \geq \varepsilon^{-2(n-k)},$$

откуда, в силу произвольности ε , следует, что значение максимизируемого функционала в (7) может быть сделано сколь угодно большим.

3) Пусть $\delta = 0$. Покажем, что

$$(8) \quad e(0, \varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \geq \sigma^{-(n-k)},$$

где $2\sigma = \text{mes } A$.

Так как $\delta = 0$, то первое ограничение в задаче (7) означает, что $Fx(\xi) = 0$ для п. в. $\xi \in A$ и тогда сама задача (7) переписывается в этом случае так

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Оценим снизу ее значение. Если $\widehat{a} = 0$, то, как показано в п. 2), это значение равно $+\infty$. Тогда согласно п. 1) $e(0, \varphi) = +\infty$ и (8) выполняется очевидным образом. Пусть $\widehat{a} > 0$. Для любого натурального m множество $[-\widehat{a} - 1/m, \widehat{a} + 1/m] \setminus [-\widehat{a}, \widehat{a}]$ содержит подмножество

положительной меры E_m , не принадлежащее A (иначе это противоречило бы определению $\widehat{a}$). Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{mes } E_m}} \left(\widehat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-n}, & \xi \in E_m, \\ 0, & \xi \notin E_m. \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что эти функции допустимы в задаче (9). Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi &\geq \frac{1}{\text{mes } E_m} \left(\widehat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-2n} \widehat{a}^{2k} \text{mes } E_m \rightarrow \\ &\rightarrow \widehat{a}^{-2(n-k)} \geq \sigma^{-2(n-k)}, \end{aligned}$$

так как, очевидно, $\widehat{a} \leq \sigma$ и значит, значение задачи (9) не меньше $\sigma^{-2(n-k)}$. Тогда в силу доказанного в п. 1) и того, что значение задачи (9) равно квадрату значения задачи (6) получаем, что $e(0, \varphi) \geq \sigma^{-(n-k)}$, а это и есть (8).

4) Покажем, что в неравенстве (8) достигается равенство, когда $A = [-\sigma, \sigma]$, а метод, что в формулировке теоремы, но с σ вместо σ_ε . Обозначим этот метод $\widetilde{\varphi}$. Действительно, для любого $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ имеем по теореме Планшереля

$$\begin{aligned} \|x^{(k)}(\cdot) - \widetilde{\varphi}(Fx(\cdot)|_{[-\sigma, \sigma]})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\sigma, \sigma]} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\sigma, \sigma]} \xi^{-2(n-k)} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq \sigma^{-2(n-k)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \sigma^{-2(n-k)}, \end{aligned}$$

т. е. $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2([- \sigma, \sigma]), I_{[-\sigma, \sigma]}, 0, \widetilde{\varphi}) \leq \sigma^{-(n-k)}$ и значит, неравенство (8) точное.

5) Теперь мы можем доказать, что $V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-\frac{1}{n-k}}$ для любого $\varepsilon > 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ положим $\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{n-k}}$. Согласно п. 4) для множества $A_\varepsilon = [-\sigma_\varepsilon/2, \sigma_\varepsilon/2]$ и соответствующего метода $\widetilde{\varphi}$ справедлива оценка $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A_\varepsilon), I_{A_\varepsilon}, 0, \widetilde{\varphi}) \leq \varepsilon$ и значит, $V(\varepsilon, 0) \leq \varepsilon^{-\frac{1}{n-k}}$. Предположим, что неравенство строгое, т. е. существует множество A , $\text{mes } A = 2\sigma$, и метод φ такие, что $\sigma < \sigma_\varepsilon$ и $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \leq \varepsilon$. Тогда с учетом (8) имеем $\varepsilon = \sigma_\varepsilon^{-(n-k)} < \sigma^{-(n-k)} \leq e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \leq \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-\frac{1}{n-k}}$.

Оптимальность множества и метода, указанных в теореме следует из приведенных рассуждений.

6) Пусть $\delta > 0$. Далее считаем, что $k \geq 1$ (случай $k = 0$ рассматривается аналогично, но технически значительно проще). Обозначим

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}}$$

и покажем, что для любого метода φ и множества A , $\text{mes } A = 2\sigma$, справедлива оценка

$$(10) \quad e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma^{2k} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}, & \sigma \leq \hat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}. \end{cases}$$

Заметим, что функция справа, переменной σ , определенная на полуинтервале $(0, \hat{\sigma}]$, монотонно убывает на этом полуинтервале и в точке $\hat{\sigma}$ ее минимальное значение равно $(\delta^2/2\pi)^{(n-k)/2n}$. Ни для каких A и φ погрешность не может быть меньше этой величины.

Оценим снизу значение задачи (7). Если $\hat{a} = 0$, то согласно п. 2) оно равно $+\infty$, а тогда из п. 1) следует, что $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) = +\infty$ и (10) выполняется тривиальным образом.

Пусть $\hat{a} > 0$. Рассмотрим случай, когда $\sigma < \hat{\sigma}$. Для каждого натурального m обозначим

$$C_m = 1 - \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \hat{a} + \frac{1}{2m} \right)^{2n}.$$

Поскольку $\hat{a} \leq \sigma < \hat{\sigma}$, то $C_m > 0$ для достаточно больших m . Далее, так как $\gamma = (k/n)^{1/2(n-k)} < 1$, то отрезок $\Delta_m = [\gamma\hat{a} - 1/2m, \gamma\hat{a} + 1/2m]$ принадлежит отрезку $[-\hat{a}, \hat{a}]$ для достаточно больших m . Наконец, пусть E_m — множество, определенное в п. 3). Для указанных m рассмотрим семейство функций $x_m(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{mes } E_m}} \left(\hat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-n} \sqrt{C_m}, & \xi \in E_m, \\ \sqrt{m} \delta, & \xi \in \Delta_m, \\ 0 & \xi \notin E_m \cup \Delta_m. \end{cases}$$

Несложная проверка показывает, что $x_m(\cdot)$ — допустимые функции в задаче (7). Далее

$$(11) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{E_m} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_m} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi \geq \left(\hat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-2n} C_m \hat{a}^{2k} + \\ + \frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \hat{a}^{2k} \rightarrow \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{a}^{2k} + \frac{1}{\hat{a}^{2(n-k)}}.$$

Выражение справа, как функция $\hat{a}$, монотонно убывает на полуинтервале $(0, \hat{\sigma}]$ и так как $\hat{a} \leq \sigma < \hat{\sigma}$, то значение задачи (7) не меньше выражения справа под корнем в (10). В силу п. 1 это доказывает оценку (10) при $\sigma < \hat{\sigma}$.

Пусть $\sigma \geq \hat{\sigma}$. Если $\hat{a} < \hat{\sigma}$, то те же рассуждения, что и выше приводят к формуле (11). Минимальное значение выражения справа в (11) равно $(\delta^2/2\pi)^{\frac{n-k}{n}}$. Это доказывает (10) в рассматриваемом случае.

Пусть $\hat{a} \geq \hat{\sigma}$. Так как $\gamma_1 = (\delta^2/2\pi)^{-\frac{1}{2n}} < \hat{\sigma}$, то для достаточно больших m отрезок $\Delta_m = [\gamma_1 - 1/m, \gamma_1]$ принадлежит полуинтервалу $(0, \hat{\sigma}]$. Для таких m рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m} \delta, & \xi \in \Delta_m, \\ 0, & \xi \notin \Delta_m. \end{cases}$$

Снова простая проверка показывает, что это допустимые функции в задаче (7) и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\delta^2}{2\pi} \left(\left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2n}} - \frac{1}{m} \right)^{2k} \rightarrow \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}},$$

т. е. оценка (10) доказана.

Докажем теперь, что эта оценка достигается на множестве $A = [-\sigma, \sigma]$ и методе из формулировки теоремы с σ вместо σ_ε . Обозначим этот метод $\tilde{\varphi}$. Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, $y(\cdot) \in L_2([-\sigma, \sigma])$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([-\sigma, \sigma])} \leq \delta$. Положим $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$ и обозначим

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \sigma_0^{2k}, \quad \lambda_2 = \sigma_0^{-2(n-k)}.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$(12) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} = \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2n} \right)^{-1}$$

и $-\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n} \geq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$.

По теореме Планшереля, учитывая (12),

$$(13) \quad \|x^{(k)}(\cdot) - \tilde{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \chi_{\sigma_0}(\xi) y(\xi) \right|^2 d\xi,$$

где $\chi_{\sigma_0}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[-\sigma_0, \sigma_0]$.

Пусть $\xi \in [-\sigma_0, \sigma_0]$. Тогда при таких ξ для выражения под знаком интеграла в правой части (13) после несложных преобразований, применяя неравенство Коши–Буняковского и то, что многочлен $\xi \mapsto -\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}$ неотрицателен на $\mathbb{R}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| (i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} y(\xi) \right|^2 = \\ & = \xi^{2k} \left| \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \sqrt{\lambda_1} (Fx(\xi) - y(\xi)) + \frac{\sqrt{\lambda_2} \xi^n}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \sqrt{\lambda_2} \xi^n Fx(\xi) \right|^2 \leq \\ & \leq \xi^{2k} \left(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n})^2} + \frac{\lambda_2 \xi^{2n}}{(\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n})^2} \right) (\lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \\ & + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2) = \frac{\xi^{2k}}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} (\lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2) \leq \\ & \leq \lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[-\sigma_0, \sigma_0]$, получаем, что интеграл справа в (13) на этом отрезке оценивается величиной

$$\lambda_1 \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_0} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi + \lambda_2 \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_0} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi.$$

Если $|\xi| > \sigma_0$, то оценка для выражения справа в (13) для таких ξ такова

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2n} \xi^{-2(n-k)} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \\ & \leq \sigma_0^{-2(n-k)} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \lambda_2 \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, учитывая выбор $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ и выражения для λ_1 и λ_2 , получим, что

$$\begin{aligned} \|x^{(k)}(\cdot) - \tilde{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 & \leq \frac{\lambda_1 \delta^2}{2\pi} + \lambda_2 \\ & = \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma_0^{2k} + \frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}. \end{aligned}$$

Если $\sigma_0 = \hat{\sigma}$, то выражение справа принимает нужное значение. Этим доказана точность неравенства (10).

7) Докажем вторую часть теоремы, когда $\delta > 0$. Пусть $\varepsilon < (\delta^2/2\pi)^{(n-k)/2n}$. Надо показать, что не существует множества A конечной меры и метода φ таких, что $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon$. Действительно, если такие A и φ нашлись, то в силу (10) имеем $\varepsilon < (\delta^2/2\pi)^{(n-k)/2n} \leq e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon$ и полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$.

Пусть $\varepsilon \geq (\delta^2/2\pi)^{(n-k)/2n}$ и σ_ε — из формулировки теоремы. Согласно предыдущему пункту для множества $A_\varepsilon = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$ и метода $\widehat{\varphi}$ из формулировки теоремы справедлива следующая оценка $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A_\varepsilon), I_{A_\varepsilon}, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \varepsilon$ и значит, $V(\varepsilon, \delta) \leq 2\sigma_\varepsilon$. Предположим, что неравенство строгое, т. е. существует множество A , $\text{mes } A = 2\sigma$, и φ такие, что $\sigma < \sigma_\varepsilon$ и $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon$. Тогда, если через $f(\cdot)$ обозначить функцию от σ в правой части выражения (10) (она строго монотонно убывает на $(0, \widehat{\sigma}]$), то согласно определению σ_ε и оценке (10) имеем $\varepsilon = f(\sigma_\varepsilon) < f(\sigma) \leq e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

Оптимальность множества и метода, указанных в теореме следует из приведенных рассуждений. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 2. С. 3–86.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 67–82.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН, 2010, 269, 181–192.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функ. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Мат. заметки, 92:1 (2012), 59–67.
- [7] Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 4. С. 119–130.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА РАН

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ