

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Работа посвящена построению семейства оптимальных методов восстановления производных функций по неточно заданному на конечном отрезке преобразованию Фурье этих функций. Точная постановка задачи такова. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$. Пусть далее $\sigma > 0$, $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $1 \leq k < n$ и $\delta > 0$. Допустим, что известно преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, заданное на Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить ее k -ую производную в метрике $L_2(\mathbb{R})$?

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), y \in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E = \inf_{m: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Теорема. Пусть k, n — целые, $1 \leq k < n$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$,

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

и $\sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\}$. Тогда

$$(1) \quad E = \sigma_0^k \sqrt{\frac{n-k}{2\pi n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \delta^2 + \sigma_0^{2(k-n)}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450 и №09-01-90360).

Для всех ограниченных функций $m(\cdot)$ таких, что

$$(2) \quad |m(\xi) - (i\xi)^k \alpha(\xi)| \leq |\xi|^k \sqrt{\alpha^2(\xi) + \alpha(\xi) \left(\left(\frac{\xi}{\sigma_0} \right)^{2(n-k)} - 1 \right)},$$

где

$$\alpha(\xi) = \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\xi}{\sigma_0} \right)^{2n} \right)^{-1},$$

методы

$$(3) \quad \varphi(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} m(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

Следствие. При всех

$$0 \leq \sigma' \leq \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\frac{1}{2k}} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \sigma_0,$$

методы

$$(4) \quad \varphi(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma'} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0} (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

Оптимальные методы (4) характеризуются тем, что на промежутке $\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0$ неточные исходные данные “фильтруются” с помощью функции $\alpha(\cdot)$, а на промежутке $|\xi| \leq \sigma'$ фильтрации не происходит.

Доказательство теоремы. Несложная оценка показывает, что E^2 не меньше значения следующей задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta^2, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1,$$

или в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\Delta_\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

У этой задачи нет решения, но, тем не менее, ее значение можно найти (используя соображения двойственности, поскольку относительно переменной $|Fx(\cdot)|^2$ это задача линейного программирования, см. [5]) и оно равно квадрату величины, стоящей в правой части (1), что дает оценку снизу величины E .

Если φ — некоторый метод, то величина $e^2(\varphi)$ равна, по определению, значению задачи

$$(5) \quad \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta^2, \\ y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma), \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1.$$

Покажем, что если метод φ в образах Фурье есть умножение на ограниченную функцию $m(\cdot)$, удовлетворяющую условию (2), то значение задачи (5) не превосходит E^2 и тем самым φ — оптимальный метод.

Итак, пусть φ — метод указанного вида. Тогда в образах Фурье задача (5), обозначая $h = (2\pi)^{-1} \int_{|t|>\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi$, $z(\xi) = Fx(\xi) - y(\xi)$ и $b(\xi) = (i\xi)^k - m(\xi)$ и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \sigma^{2(k-n)} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi = h\sigma^{2(k-n)},$$

может быть переписана в виде

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} |m(\xi)z(\xi) + b(\xi)Fx(\xi)|^2 d\xi + h\sigma^{2(k-n)} \rightarrow \max, \\ \int_{\Delta_\sigma} |z(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi + h \leq 1.$$

Из неравенства Коши–Буняковского $|m(\xi)z(\xi) + b(\xi)Fx(\xi)|^2 \leq (s^{-1}|a(\xi)|^2 + 2\pi\xi^{-2n}|b(\xi)|^2)(s|z(\xi)|^2 + (2\pi)^{-1}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2)$, справедливо-го для любого $s > 0$, вытекает, что значение задачи (6) оценивается величиной

$$(7) \quad \max_{h \in [0,1]} (A_s(s\delta^2 + 1 - h) + h\sigma^{2(k-n)}) = A_s s\delta^2 + \max(A_s, \sigma^{2(k-n)})$$

где

$$A_s = A_s(m(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in \Delta_\sigma} \left(\frac{|m(\xi)|^2}{s} + \frac{2\pi}{\xi^{2n}} |b(\xi)|^2 \right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in \Delta_\sigma} \left(\frac{\xi^{2n} + 2\pi s}{s\xi^{2n}} \left| m(\xi) - \frac{2\pi s(i\xi)^k}{\xi^{2n} + 2\pi s} \right|^2 + \frac{2\pi\xi^{2k}}{\xi^{2n} + 2\pi s} \right).$$

Если $m(\xi) = \hat{m}(\xi) = 2\pi s(i\xi)^k / (\xi^{2n} + 2\pi s)$, то легко найти, что

$$A_s(\hat{m}(\cdot)) = \begin{cases} \frac{k}{n} \left(\frac{n-k}{2\pi k s} \right)^{1-k/n}, & s \leq \frac{n-k}{2\pi k} \sigma^{2n}, \\ \frac{\sigma^{2k}}{\sigma^{2n} + 2\pi s}, & s > \frac{n-k}{2\pi k} \sigma^{2n}. \end{cases}$$

Отсюда и (7), обозначая через $\widehat{\varphi}$ метод, соответствующий функции $\widehat{m}(\cdot)$, получаем, что для всех $s > 0$

$$e^2(\widehat{\varphi}) \leq \begin{cases} A_s(\widehat{m}(\cdot))(s\delta^2 + 1), & s \leq \frac{n-k}{2\pi k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} \sigma^{2n}, \\ A_s(\widehat{m}(\cdot))s\delta^2 + \sigma^{2(n-k)}, & s > \frac{n-k}{2\pi k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} \sigma^{2n}. \end{cases}$$

Минимум величины справа по s совпадает с квадратом величины, стоящей в правой части (1) и достигается в точке

$$\widehat{s} = \frac{n-k}{2\pi k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} \sigma_0^{2n}.$$

При этом, $A_{\widehat{s}}(\widehat{m}(\cdot)) = \sigma_0^{2(k-n)}$. Таким образом, если ограниченная функция $m(\cdot)$ такова, что выполняется равенство $A_{\widehat{s}}(m(\cdot)) = \sigma_0^{2(k-n)}$, то соответствующий метод оптимален. Но это равенство, как нетрудно проверить, равносильно условию (2). $\square$

Следствие непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

Первые результаты, касающиеся оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации, были получены в работе [1]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [2], [3] и [4].

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Melkman A. A., Micchelli C. A., “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление операторов по неточной информации”, Математический форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009, 158–192.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2003 (2-ое изд.).

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО