

Введение в теорию оптимального восстановления

К. Ю. Осипенко

Оглавление

Предисловие	6
Введение	7
Глава 1. Простейшие задачи оптимального восстановления	9
1.1. Задача интерполяции	9
1.2. Минимизация функции	13
1.3. Численное интегрирование	15
1.4. Численное дифференцирование по неточным значениям в точках	16
1.5. Восстановление производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье	19
1.6. Интерполяция приближенно заданной функции	22
1.7. Нахождение решения уравнения теплопроводности по неточным начальным данным	24
1.8. Комментарии	27
Глава 2. Общая теория	28
2.1. Постановка задачи оптимального восстановления	28
2.2. Оптимальное восстановление линейных функционалов	30
2.3. Оптимальное восстановление и задача Стечкина	39
2.4. Построение оптимального метода с помощью параметризации экстремального элемента	41
2.5. Оптимальное восстановление операторов	43
2.6. Построение семейства оптимальных методов	54
2.7. Адаптивная информация	64
2.8. Критерий существования линейного оптимального неадаптивного метода в задаче адаптивного восстановления	67
2.9. Восстановление по информации со случайной ошибкой	70
2.10. Комментарии	79
Глава 3. Оптимальное восстановление операторов в L_q -метриках	81
3.1. Общая задача о восстановлении в L_q -метриках	81
3.2. Случай совпадения двух метрик	85
3.3. Оптимальное восстановление для однородных весов	91
3.4. Точные неравенства	95
3.5. Оптимальное восстановление для однородных весов в $\mathbb{R}^d$	97
3.6. Точные неравенства для однородных весов в $\mathbb{R}^d$ и обобщенные неравенства Карлсона	103
3.7. Восстановление дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье	104
3.8. Восстановление в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$	104
3.9. Восстановление в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$	116
3.10. Точные неравенства для степеней оператора Лапласа и дробных производных	122

3.11. Комментарии	123
Глава 4. Оптимальная интерполяция	125
4.1. Оптимальная интерполяция на классе $W_{\infty}^r([-1, 1])$	125
4.2. Минимизация погрешности восстановления на классе $W_{\infty}^r([-1, 1])$	126
4.3. Оптимальная интерполяция на классе H_p	129
4.4. Минимизация погрешности восстановления на классе H_p	131
4.5. Оптимальная интерполяция на классах Харди–Соболева H_{∞}^r	135
4.6. Интерполяция по значениям в бесконечном числе точек	141
4.7. Восстановление производной	147
4.8. Восстановление производных по неточным значениям функций	149
4.9. Неравенство Колмогорова для аналитических в полосе функций	152
4.10. Комментарии	162
Глава 5. Оптимальное восстановление сигналов	164
5.1. Регуляризация по Тихонову	164
5.2. Регуляризация по Колмогорову	167
5.3. Задание коэффициентов Фурье с погрешностью в равномерной метрике	171
5.4. Восстановление функции и ее производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в метрике l_2^N	174
5.5. Восстановление функции и ее производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в метрике l_{∞}^N	181
5.6. Восстановление функции и ее производных по неточно заданному преобразованию Фурье	185
5.7. Оптимальное восстановление и точность на подпространствах	193
5.8. Оптимальное восстановление производных и неравенства для производных колмогоровского типа	201
5.9. Восстановление производных на полупрямой	209
5.10. Восстановление производных в многомерном случае	215
5.11. Комментарии	219
Глава 6. Оптимальное восстановление решений уравнений математической физики	222
6.1. Восстановление решения уравнения теплопроводности	222
6.2. Обобщенное уравнение теплопроводности на сфере	227
6.3. Обобщенное уравнение теплопроводности в шаре	229
6.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре	231
6.5. Оптимальное восстановление решений разностных уравнений	232
6.6. Комментарии	238
Глава 7. Дополнение I	239
7.1. Равномерное наилучшее приближение	239
7.2. Теорема Хана–Банаха для однородно-выпуклого функционала с бесконечными значениями	242
7.3. Наилучшие приближения в линейных пространствах с полускалярным произведением	245
7.4. Теорема Борсука	245
7.5. Совершенные сплайны. Интерполяция сплайнами	249
7.6. Граничные значения аналитических функций	253
7.7. Задача Неванлинны–Пика	263
7.8. Неравенство Фейера–Рисса	266
7.9. Теоремы отделимости	267
7.10. Аффинные подпространства	268

7.11.	Теорема Каратеодори	269
7.12.	Аффинная независимость. Симплексы	270
7.13.	Выпуклые функции	272
7.14.	Двойственность выпуклых функций	273
7.15.	Интегральное неравенство Йенсена	274
7.16.	Неравенство Юнга для сверток	275
7.17.	Неравенства для последовательностей	275
Глава 8.	Дополнение II. Эллиптические функции	278
8.1.	Периоды мероморфных функций	278
8.2.	Общие свойства эллиптических функций	280
8.3.	Эллиптический синус	281
8.4.	Первое главное преобразование n -ой степени	285
8.5.	Произведения Бляшке–Золотарева	288
8.6.	Функция Вейрштрасса $\wp(\cdot)$	289
8.7.	Дифференциальное уравнение для функции $\wp(\cdot)$	291
8.8.	Функция Вейрштрасса $\zeta(\cdot)$	292
8.9.	Функция Вейрштрасса $\sigma(\cdot)$	293
8.10.	Связь между функциями $\wp(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$. Функции $\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot), \sigma_3(\cdot)$	294
8.11.	Тета-функции	295
8.12.	Представление тета-функций бесконечными произведениями	296
8.13.	Связь между сигма-функциями и тета-функциями	299
8.14.	Выражение e_1, e_2, e_3 через значения тета-функций	301
8.15.	Эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$	302
8.16.	Дифференциальные уравнения для функций Якоби	304
8.17.	Теоремы сложения для функций Якоби	305
8.18.	Второе главное преобразование первой степени	306
8.19.	Преобразование Ландена и Гаусса	308
8.20.	Разложение эллиптического синуса в ряд Фурье	309
Глава 9.	Дополнение III. Сферические гармоники. Собственные функции оператора Лапласа	310
9.1.	Однородные многочлены	310
9.2.	Однородные гармонические многочлены	311
9.3.	Сферические гармоники	312
9.4.	Зональные гармоники	313
9.5.	Задача Дирихле	314
9.6.	Собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами	316
9.7.	Функции Бесселя	317
9.8.	Ортогональность функций Бесселя	319
9.9.	Теорема Штурма о сравнении	320
9.10.	Свойства нулей функции Бесселя	321
9.11.	Собственные функции оператора Лапласа в шаре	322
Литература		324

Предисловие

Предлагаемая книга посвящена основам возникшей сравнительно недавно теории оптимального восстановления, а также демонстрации ряда задач, которые могут быть решены с помощью этой теории. Приложения теории оптимального восстановления довольно многочисленны. Мы остановились на задачах восстановления значений дифференциальных операторов, интерполяции, восстановления сигналов и решений уравнений математической физики. Задачи интерполяции рассматриваются как на классах гладких функций, так и на классах аналитических функций. Более подробно задачи восстановления на классах аналитических функций рассмотрены в книге автора [19]. Следует отметить наиболее близкие к рассматриваемой тематике книги [100], [30], [28].

Автор попытался по возможности сделать текст книги замкнутым. Поэтому практически все используемые результаты, не входящие в стандартные университетские курсы, вынесены в довольно объемное дополнение.

Хочу выразить благодарность моим учителям Н. С. Бахвалову, который поставил передо мной первые задачи оптимального восстановления, и В. М. Тихомирову, общение с которым во многом сформировало общие взгляды на всю математику, а обсуждение многих проблем помогло при создании этой книги. Считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему коллеге и соавтору многочисленных работ Г. Г. Магарил-Ильяеву, с которым автор неоднократно обсуждал текст книги.

Введение

Довольно естественный подход к решению многих задач (не только математических) основан на выборе среди возможных способов решения того, которое имеет наилучшие в том или ином смысле свойства. При этом, имея некоторый способ сравнения различных методов решения, отыскиваемый наилучший метод решения называют *оптимальным методом*. Попытаемся уточнить это понятие.

Как правило, искомый метод решения предполагается использовать не для одной, а для целой серии задач схожего типа. Обозначим множество таких задач через $\mathcal{P}$. При решении конкретной задачи p из этого множества обычно используется некоторая исходная информация об этой задаче $I(p)$. Эта информация часто бывает неполной или неточно заданной, что не позволяет решить задачу точно. Поэтому располагая информацией $I(p)$ и применяя к ней какой-то метод решения m , мы получаем на выходе лишь приближенное решение задачи.

Для сравнения эффективности решения при использовании различных методов надо ввести некоторую числовую характеристику метода, отражающую качество решения задачи данным методом, учитывающую погрешность решения и/или затраты на реализацию данного алгоритма и т. п. Обозначим такую характеристику через $e(p, I, m)$.

Поскольку мы заранее не знаем какую задачу из множества $\mathcal{P}$ нам предстоит решать, то естественно оценивать применяемый алгоритм решения сразу на всем множестве $\mathcal{P}$ и рассматривать величину

$$e(\mathcal{P}, I, m) = \sup_{p \in \mathcal{P}} e(p, I, m),$$

называемую *погрешностью метода m на множестве $\mathcal{P}$* .

Если имеется некоторое множество методов $\mathcal{M}$, из которого надо выбрать наилучший, то выбрать его следует так, чтобы его погрешность была минимальной, т. е. из условия

$$e(\mathcal{P}, I, \hat{m}) = \inf_{m \in \mathcal{M}} e(\mathcal{P}, I, m).$$

При этом метод $\hat{m}$ называется *оптимальным*, а величина

$$E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M}) = \inf_{m \in \mathcal{M}} e(\mathcal{P}, I, m)$$

— *погрешностью оптимального решения*.

Еще один тип задач возникает, когда имеется возможность выбирать тип исходной информации о решаемых задачах. Конечно, при увеличении объема исходной информации следует ожидать более точного решения задач. Однако это ведет ко все большим затратам, направленным на получение исходной информации. Поэтому, как правило, фиксируют объем исходной информации (например, число данных измерений) и сравнивают получаемые погрешности

при различных типах исходной информации. Тем самым приходят к следующей задаче о нахождении информации оптимального типа

$$E(\mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{M}) = \inf_{I \in \mathcal{I}} E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M}),$$

где $\mathcal{I}$ — множество возможных типов исходной информации.

В математике наиболее характерными задачами такого типа являются, например, задачи о приближенном вычислении значения функции в некоторой точке или интеграла от функции на основании информации о значениях той же функции в некоторой фиксированной системе точек. Решение подобных задач в рамках сформулированного выше подхода получило название *оптимального восстановления*.

Простейшие задачи оптимального восстановления

1.1. Задача интерполяции

Одной из наиболее распространенных задач восстановления является задача интерполяции, состоящая в приближенном вычислении функции $x(\cdot)$ в некоторой точке τ по значениям этой функции в других точках $x(t_1), \dots, x(t_n)$. Очевидно, что для корректной постановки этой задачи надо знать дополнительную информацию о том, какие функции могут нам встретиться. Один из подходов к этой задаче таков: будем искать функцию $\hat{x}(\cdot)$ наиболее просто устроенную (например, просто вычисляющуюся) и принимающую в точках $t_1, \dots, t_n$ те же значения $x(t_1), \dots, x(t_n)$. За приближенное значение $x(\tau)$ берется в этом случае $\hat{x}(\tau)$. В качестве таких просто устроенных функций рассматривают, например, алгебраические полиномы (или тригонометрические полиномы).

Для алгебраических полиномов задача интерполяции ставится так: найти полином минимальной степени, принимающий в точках $x(t_1), \dots, x(t_n)$ значения $x(t_1), \dots, x(t_n)$. Нетрудно убедиться, что полином степени $n - 1$

$$(1.1) \quad L_{n-1}(t) = \sum_{j=1}^n l_j(t)x(t_j),$$

где

$$l_j(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k},$$

называемый *интерполяционным полиномом Лагранжа*, удовлетворяет условиям

$$L_{n-1}(t_j) = x(t_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Если предположить, что найдется полином меньшей степени $P(\cdot)$, который удовлетворяет тем же условиям, то полином $P(\cdot) - L_{n-1}(\cdot)$ степени $n - 1$ будет обращаться в ноль в n точках $t_1, \dots, t_n$. Следовательно, по основной теореме алгебры $P(t) \equiv L_{n-1}(t)$. Таким образом, интерполяционный полином Лагранжа решает поставленную задачу, и в такой постановке $x(\tau) \approx L_{n-1}(\tau)$.

Другой подход, берущий свое начало от идей А. Н. Колмогорова, связанных с задачами приближения на классах функций, заключается в том, чтобы не фиксировать заранее вид приближающей функции, а искать ее на основе априорной информации о свойствах функций, которые могут встретиться. При этом множество функций, для которых рассматривается соответствующая задача, называется *классом*. Обычно рассматриваются классы функций, задаваемые некоторыми свойствами, связанными с гладкостью или аналитичностью. При таком подходе появляется возможность получения новых методов приближения, которые хорошо приспособлены именно для аппроксимации функций из рассматриваемого класса. Надо отметить, что рассматриваемая постановка включает в себя и первую постановку. Для этого в качестве класса рассматриваемых функций надо взять полиномы степени $n - 1$.

Перейдем к более точной постановке задачи интерполяции для *соболевского класса* функций $W_\infty^r([-1, 1])$, определенных на отрезке $[-1, 1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r - 1$ и удовлетворяющих почти всюду на $[-1, 1]$ условию $|x^{(r)}(t)| \leq 1$. Будем рассматривать задачу оптимального восстановления значения $x(\tau)$, $\tau \in [-1, 1]$, по значениям функции $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$ в системе различных точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ из отрезка $[-1, 1]$. Таким образом, информация о функции, имеющаяся в нашем распоряжении такова: $F_{\bar{t}}x(\cdot) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Для данного метода $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ полагаем

$$x(\tau) \approx m(F_{\bar{t}}x(\cdot)).$$

Погрешностью метода m назовем величину

$$e(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])} |x(\tau) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|,$$

а *погрешностью оптимального восстановления* — величину

$$(1.2) \quad E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} e(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Если $r \geq n + 1$, то существует интерполяционный полином Лагранжа $L_n(t)$, который принимает в точках $t_1, \dots, t_n$ значения $x(t_1), \dots, x(t_n)$, а в точке τ любое наперед заданное значение. Поскольку $L_n(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$, то отсюда сразу же следует, что $e(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \infty$, если $r \geq n + 1$. Тем самым задачу имеет смысл рассматривать лишь при $1 \leq r \leq n$.

Рассмотрим случай $r = n$. Начнем с оценки снизу погрешности оптимального восстановления. Положим

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{n!}(t - t_1) \dots (t - t_n).$$

Очевидно, что $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$. Поскольку $F_{\bar{t}}\hat{x}(\cdot) = 0$, то для любого метода m имеем

$$2|\hat{x}(\tau)| \leq |\hat{x}(\tau) - m(0)| + |-\hat{x}(\tau) - m(0)| \leq 2e(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Откуда

$$(1.3) \quad E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq |\hat{x}(\tau)|.$$

Докажем теперь, что интерполяционный полином Лагранжа является оптимальным методом восстановления на классе $W_\infty^n([-1, 1])$. Пусть $x(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$ и $\tau \notin \{t_1, \dots, t_n\}$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = x(t) - L_{n-1}(t) - K\hat{x}(t),$$

где

$$K = \frac{x(\tau) - L_{n-1}(\tau)}{\hat{x}(\tau)}.$$

Функция $y(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$ и обращается в ноль в точках $t_1, \dots, t_n, \tau$. Следовательно, по теореме Ролля $y^{(n-1)}(\cdot)$ обращается в ноль не менее, чем в двух различных точках τ_1 и τ_2 из интервала $(-1, 1)$. Тогда

$$0 = y^{(n-1)}(\tau_2) - y^{(n-1)}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} y^{(n)}(t) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (x^{(n)}(t) - K) dt.$$

Тем самым

$$K(\tau_2 - \tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} x^{(n)}(t) dt.$$

Отсюда следует, что $|K| \leq 1$, то есть

$$|x(\tau) - L_{n-1}(\tau)| \leq |\hat{x}(\tau)|.$$

Очевидно, что это неравенство справедливо и для $\tau \in \{t_1, \dots, t_n\}$ (в этом случае оно просто обращается в равенство). Следовательно, доказано, что

$$E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \leq |\hat{x}(\tau)|,$$

что вместе с неравенством (1.3) дает

$$(1.4) \quad E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n!} |(\tau - t_1) \dots (\tau - t_n)|$$

и доказывает оптимальность метода

$$x(\tau) \approx L_{n-1}(\tau).$$

Теперь естественно поставить вопрос о том, как выбрать точки $t_1, \dots, t_n \in [-1, 1]$, в которых будут измеряться значения функции $x(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$, чтобы максимальное значение погрешности восстановления, когда $\tau \in [-1, 1]$, было минимальным. Иначе говоря, речь идет о нахождении величины

$$(1.5) \quad E_n(W_\infty^n([-1, 1]), C([-1, 1])) = \inf_t \max_{\tau \in [-1, 1]} E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}})$$

и точек, на которых эта нижняя грань достигается. В силу равенства (1.4) из теоремы 7.5 сразу же следует, что узлы, на которых достигается нижняя грань в (1.5), являются нулями многочлена Чебышева

$$\hat{t}_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = 1, \dots, n.$$

При этом

$$E_n(W_\infty^n([-1, 1]), C([-1, 1])) = \frac{1}{n! 2^{n-1}}.$$

Рассмотрим еще случай $r = 1$ (промежуточные случаи $1 < r < n$ будут рассмотрены позже). Обозначим через $\alpha(t)$ — ближайшую к t точку из множества $\{t_1, \dots, t_n\}$ (в случае, если t лежит посередине между t_k и t_{k+1} , будем считать для определенности $\alpha(t) = t_k$). Положим теперь (см. рис. 1.1.1)

$$(1.6) \quad \hat{x}(t) = |t - \alpha(t)|.$$

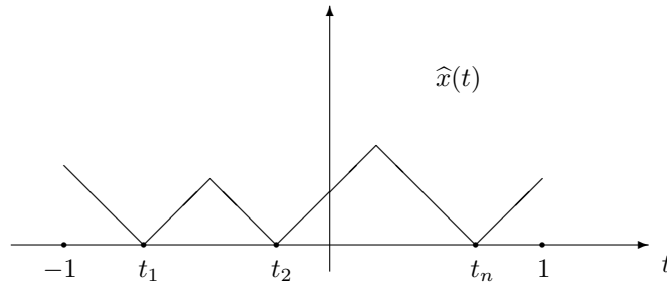


Рис. 1.1.1

Очевидно, что $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$, $-\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ и $F_{\bar{t}}\hat{x}(\cdot) = F_{\bar{t}}(-\hat{x}(\cdot)) = 0$. Для любого метода m имеем

$$2\hat{x}(\tau) \leq |\hat{x}(\tau) - m(0)| + |-\hat{x}(\tau) - m(0)| \leq 2e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Откуда

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq \hat{x}(\tau).$$

Пусть $\alpha(\tau) = t_k$, $1 \leq k \leq n$. Определим метод $\hat{m}$ равенством $\hat{m}(y) = y_k$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ имеем

$$|x(\tau) - \hat{m}(F_{\bar{t}}x(\cdot))| = |x(\tau) - x(t_k)| \leq |\tau - t_k| = \hat{x}(\tau).$$

Следовательно,

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \hat{x}(\tau),$$

а метод (см. рис. 1.1.2)

$$x(\tau) \approx x(\alpha(\tau))$$

является оптимальным методом восстановления.

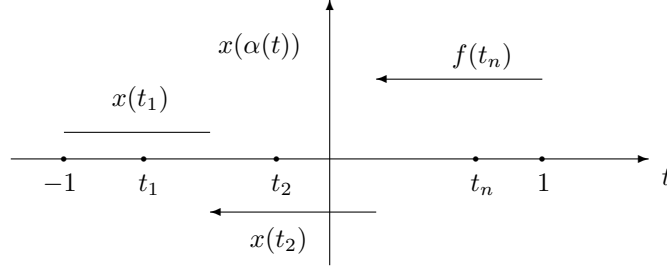


Рис. 1.1.2

Оптимальных методов может быть много. Среди них можно выделить те, которые имеют наименьшую погрешность при любом фиксированном значении информационного оператора $F_{\bar{t}}$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и существует функция $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$, для которой $F_{\bar{t}}x = y$. Положим

$$W_y = \{ x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1]) : F_{\bar{t}}x = y \}.$$

Рассмотрим множество

$$A_y = \{ x(\tau) : x(\cdot) \in W_y \}.$$

Множество A_y является отрезком числовой оси, а число

$$c_y = \frac{\sup_{x(\cdot) \in W_y} x(\tau) + \inf_{x(\cdot) \in W_y} x(\tau)}{2}$$

— его середина. Поэтому для любого фиксированного y , для которого множество W_y непусто, и для всех $x(\cdot) \in W_y$ имеет место равенство

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - c| = \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - c_y|.$$

Положим

$$\hat{m}_c(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = c_{F_{\bar{t}}x(\cdot)}.$$

Тогда для любого метода m

$$\begin{aligned} e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) &= \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ W_y \neq \emptyset}} \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - m(y)| \\ &\geq \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ W_y \neq \emptyset}} \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - c_y| = e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, \hat{m}_c). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что метод $\hat{m}_c$ является оптимальным. Но он и наилучший при любом фиксированном значении информационного оператора $F_{\bar{t}}$. Такие методы называются *центральными*.

Найдем явный вид метода $\hat{m}_c$. Положим

$$t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} - \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}, \quad t_j^{**} = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} + \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что (см. рис. 1.1.3)

$$\widehat{m}_c(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \begin{cases} y_1, & -1 \leq \tau \leq t_1, \\ y_j, & t_j \leq \tau \leq t_j^*, \\ & j = 1, \dots, n-1, \\ \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + \text{sign}(y_{j+1} - y_j) \left(\tau - \frac{t_j + t_{j+1}}{2} \right), & t_j^* \leq \tau \leq t_j^{**}, \\ & j = 1, \dots, n-1, \\ y_{j+1}, & t_j^{**} \leq \tau < t_{j+1}, \\ & j = 1, \dots, n-1, \\ y_n, & t_n \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

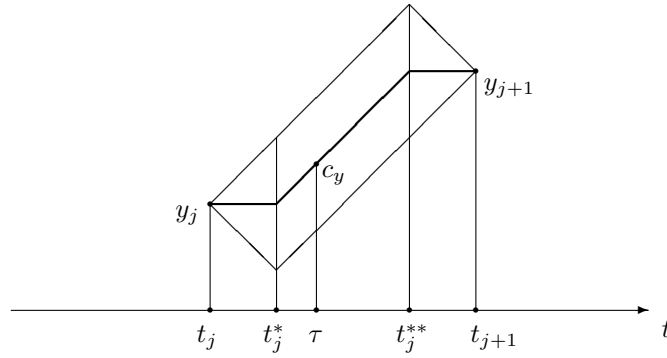


Рис. 1.1.3

Здесь тоже можно рассмотреть задачу о минимизации максимального значения погрешности для $\tau \in [-1, 1]$ за счет выбора узлов $-1 \leq t_1 < \dots < t_n < 1$. Легко получить, что

$$E_n(W_\infty^1([-1, 1]), C([-1, 1])) = \inf_{\bar{t}} \max_{\tau \in [-1, 1]} E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n},$$

а точки, на которых достигается нижняя грань, являются равномерно распределенными на отрезке $[-1, 1]$

$$(1.7) \quad \widehat{t}_j = -1 + \frac{2j-1}{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.2. Минимизация функции

Для класса $W_\infty^1([-1, 1])$ и того же информационного оператора $F_{\bar{t}}$ рассмотрим задачу оптимального восстановления минимума функции $x \in W_\infty^1([-1, 1])$. Иными словами, речь идет об оптимальном восстановлении нелинейного функционала

$$Lx(\cdot) = \min_{t \in [-1, 1]} x(t).$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} |Lx(t) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|,$$

а задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} |Lx(t) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|$$

и оптимального метода восстановления $\hat{m}_L$, на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

Построим центральный метод в этой задаче. При фиксированном $y \in \mathbb{R}^n$ таким, что

$$W_y = \{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1]) : F_{\bar{t}}x = y\} \neq \emptyset,$$

все функции из множества W_y лежат между верхней ломаной $Z_y(t)$ и нижней ломаной $z_y(t)$, графики которых при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ изображены на рис. 1.1.3. Следовательно, для любой функции из W_y

$$\min_{t \in [-1, 1]} Z_y(t) \leq \min_{t \in [-1, 1]} x(t) \leq \min_{t \in [-1, 1]} z_y(t).$$

Очевидно, что

$$\min_{t \in [-1, 1]} Z_y(t) = \min_{1 \leq j \leq n} y_j.$$

Минимум функции $z_y(t)$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ достигается в точке t_j^* (если $y_j \leq y_{j+1}$) или t_j^{**} (если $y_j \geq y_{j+1}$) (см. рис. 1.1.3). Несложные вычисления показывают, что

$$\min_{t \in [t_j, t_{j+1}]} z_y(t) = \frac{y_{j+1} + y_j}{2} - \frac{t_{j+1} - t_j}{2}.$$

Учитывая отрезки $[-1, t_1]$ и $[t_n, 1]$, имеем

$$\min_{t \in [-1, 1]} z_y(t) = \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - h_1/2, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - h_{n-1}/2, y_n - h_n \right\},$$

где $h_0 = t_1 + 1$, $h_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $h_n = 1 - t_n$. Таким образом, метод

$$\begin{aligned} \hat{m}_L(F_{\bar{t}}x(\cdot)) &= \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} y_j \\ &+ \frac{1}{2} \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - h_1/2, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - h_{n-1}/2, y_n - h_n \right\}, \end{aligned}$$

является оптимальным и центральным методом восстановления.

Найдем погрешность оптимального восстановления. Пусть $\min_{1 \leq j \leq n} y_j = c$. Тогда

$$\begin{aligned} \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - h_1/2, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - h_{n-1}/2, y_n - h_n \right\} \\ \geq \min \{c - h_0, c - h_1/2, \dots, c - h_{n-1}/2, c - h_n\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, \hat{m}_L) \leq \frac{1}{2} \min \{h_0, h_1/2, \dots, h_{n-1}/2, h_n\}.$$

Очевидно, что величина стоящая справа достигается на функции $x(t) \equiv 0$. Тем самым

$$E(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{2} \min \{h_0, h_1/2, \dots, h_{n-1}/2, h_n\}.$$

Можно рассмотреть задачу о минимизации этой величины за счет выбора узлов. Здесь так же, как и в задаче интерполяции на этом классе минимум будет достигаться на равномерной системе узлов (1.7). При этом центральный метод будет иметь вид

$$\hat{m}_L(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} y_j + \frac{1}{2} \min \left\{ y_1, \frac{y_2 + y_1}{2}, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2}, y_n \right\} - \frac{1}{2n}.$$

1.3. Численное интегрирование

Для того же класса $W_\infty^1([-1, 1])$ и того же информационного оператора $F_{\bar{t}}$ рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения интеграла

$$Ix(\cdot) = \int_{-1}^1 x(t) dt.$$

В качестве методов восстановления будем по-прежнему рассматривать всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - m(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right|$$

и оптимального метода восстановления $\hat{m}_0$, на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

Для функции $\hat{x}(\cdot)$, определенной равенством (1.6), и любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt &\leq \left| \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt - m(0) \right| + \left| \int_{-1}^1 (-\hat{x}(t)) dt - m(0) \right| \\ &\leq 2 \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - m(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right|. \end{aligned}$$

Тем самым

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt.$$

С другой стороны, положив

$$\hat{m}_0(y) = \int_{-1}^1 y(t) dt,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} y_1, & -1 \leq t \leq \frac{t_1 + t_2}{2}, \\ y_j, & \frac{t_{j-1} + t_j}{2} < t \leq \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \quad 2 \leq j \leq n-1, \\ y_n, & \frac{t_{n-1} + t_n}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

при всех $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - \hat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right| &= \left| \int_{-1}^1 (x(t) - x(\alpha(t))) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |t - \alpha(t)| dt = \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt = \frac{(t_1 + 1)^2}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^2}{4} + \frac{(1 - t_n)^2}{2},$$

а

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x(t) dt &\approx \hat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \\ &= \left(\frac{t_1 + t_2}{2} + 1 \right) x(t_1) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2} x(t_j) + \left(1 - \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right) x(t_n) \end{aligned}$$

— оптимальный метод восстановления.

Здесь также можно рассмотреть задачу о построении центрального метода. В силу того, что все функции из множества W_y лежат между верхней ломаной $Z_y(t)$ и нижней ломаной $z_y(t)$, графики которых при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ изображены на рис. 1.1.3, для любой функции из W_y имеет место неравенство

$$\int_{-1}^1 Z_y(t) dt \leq \int_{-1}^1 x(t) dt \leq \int_{-1}^1 z_y(t) dt.$$

Поэтому центральный метод будет иметь вид

$$\hat{m}_c(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (Z_y(t) + z_y(t)) dt.$$

Несложные вычисления показывают, что этот метод совпадает с методом $\hat{m}_0$.

Если в наших возможностях выбирать систему точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, в которых будут измеряться значения функций $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ (иначе говоря, есть возможность выбора исходной информации), то естественно выбрать эти точки так, чтобы величина $E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}})$ была по возможности меньше. Нетрудно убедиться, что

$$\inf_{\bar{t}} E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n},$$

а оптимальные точки (т. е. точки, на которых достигается нижняя грань) определяются равенствами (1.7). При этом метод $\hat{m}_0$ будет иметь вид

$$\hat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n x(\hat{t}_j).$$

Оказывается, что этот метод, хорошо известный и называемый *формулой прямоугольников*, является центральным методом.

1.4. Численное дифференцирование по неточным значениям в точках

В рассмотренных выше задачах информация о функции хотя и была неполной, но задавалась точно. Реально, любая исходная информация содержит ту или иную погрешность. Одним из примеров задачи оптимального восстановления по неточной информации является задача оптимального восстановления значения $x'(0)$ функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ по ее приближенным значениям в точках $\pm h$, $0 < h \leq 1$. Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ нам известны значения $\tilde{x}_{-1}$ и $\tilde{x}_1$ такие, что

$$(1.8) \quad |x(jh) - \tilde{x}_j| \leq \delta, \quad j = -1, 1,$$

где $\delta > 0$ — погрешность исходной информации. Здесь информационный оператор уже многозначное отображение $F_{h,\delta}$, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ множество $F_{h,\delta}x(\cdot) = \{(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1)\}$, где $\tilde{x}_{-1}$ и $\tilde{x}_1$ удовлетворяют условию (1.8). Рассмотрим в качестве методов восстановления произвольные функции $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешностью данного метода m назовем величину

$$\begin{aligned} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m) \\ = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])} \sup_{\substack{\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1 \in \mathbb{R} \\ |x(jh) - \tilde{x}_j| \leq \delta, \quad j = -1, 1}} |x'(0) - m(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1)|. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \inf_{m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m)$$

и оптимальный метод восстановления, т.е. метод, на котором эта нижняя грань достигается.

Положим

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}\right)t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{t^2}{2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}\right)t, & -1 \leq t < 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\pm \widehat{x}(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ и $\widehat{x}(-h) = -\delta$, $\widehat{x}(h) = \delta$. Для любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2\widehat{x}'(0) &\leq |\widehat{x}'(0) - m(0, 0)| + |-\widehat{x}'(0) - m(0, 0)| \\ &\leq 2e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(1.9) \quad E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) \geq \widehat{x}'(0) = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}.$$

Рассмотрим метод

$$(1.10) \quad \widehat{m}(\widetilde{x}_{-1}, \widetilde{x}_1) = \frac{\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_{-1}}{2h}.$$

Учитывая, что $\widetilde{x}_j = x(jh) + \delta_j$, где $|\delta_j| \leq \delta$, $j = -1, 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, \widehat{m}) &= \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2} \sup_{|\delta_j| \leq \delta, j=-1,1} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} - \frac{\delta_1 - \delta_{-1}}{2h} \right| \\ &\leq \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} \right| + \frac{\delta}{h}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int_0^t (t - \tau)x''(\tau) d\tau,$$

получаем

$$\left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} \right| = \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^0 (h + \tau)x''(\tau) d\tau + \int_0^h (h - \tau)x''(\tau) d\tau \right| \leq \frac{h}{2}.$$

Тем самым

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, \widehat{m}) \leq \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}.$$

Учитывая (1.9), находим, что

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h},$$

а метод (1.10) является оптимальным.

Можно поставить вопрос об оптимизации исходной информации за счет выбора шага h . Несложные вычисления показывают, что

$$\min_{0 < h \leq 1} E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ \delta + 1/2, & \delta \geq 1/2, \end{cases}$$

при этом значение шага, на котором достигается минимум таково:

$$(1.11) \quad \widehat{h} = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ 1, & \delta \geq 1/2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь аналогичную задачу, несколько изменив исходную информацию. Обозначим через $C([-1, 1])$ линейное пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([-1, 1])} = \max_{t \in [-1, 1]} |x(t)|.$$

Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ нам известна функция $\tilde{y}(\cdot) \in C([-1, 1])$ такая, что

$$(1.12) \quad \|x(\cdot) - \tilde{y}(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \leq \delta.$$

Иначе говоря, задается информационный оператор $F_\delta([-1, 1])$, ставящий каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ множество функций $\tilde{y}(\cdot) \in C([-1, 1])$, удовлетворяющих условию (1.12).

В этом случае погрешностью произвольного метода $m: C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем величину

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1]), \\ \|x(\cdot) - \tilde{y}(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \leq \delta}} |x'(0) - m(\tilde{y}(\cdot))|.$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления

$$(1.13) \quad E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1])) = \inf_{m: C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), m)$$

и метод, на котором эта нижняя грань достигается, называемый оптимальным.

Положим

$$\hat{x}_0(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}\right)t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{t^2}{2} + \left(\frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}\right)t, & -1 \leq t < 0, \end{cases}$$

где $\hat{h}$ определено равенством (1.11). Тогда $\pm \hat{x}_0(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ и

$$\|\hat{x}_0(\cdot)\|_{C([-1, 1])} = \delta.$$

Для любого метода m имеем

$$2\hat{x}'_0(0) \leq |\hat{x}'_0(0) - m(0)| + |-\hat{x}'_0(0) - m(0)| \leq 2e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), m).$$

Следовательно,

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1])) \geq \hat{x}'_0(0) = \frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}.$$

Рассмотрим метод

$$(1.14) \quad \hat{m}(\tilde{y}) = \frac{\tilde{y}(\hat{h}) - \tilde{y}(-\hat{h})}{2\hat{h}}.$$

В силу оценки, проведенной для метода (1.10), получаем

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), \hat{m}) \leq \frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}.$$

Отсюда

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1])) = \frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}} = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ \delta + \frac{1}{2}, & \delta \geq 1/2. \end{cases},$$

а метод (1.14) является оптимальным.

Отметим, что оптимальный метод использует лишь два значения функции $\tilde{y}(\cdot)$. Вся остальная информация о функции $\tilde{y}(\cdot)$ не используется. В дальнейшем мы увидим, что это довольно характерная ситуация для восстановления по неточной информации. Поэтому возникает вопрос: какова та “полезная” информация, достаточная для оптимального восстановления?

1.5. Восстановление производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Класс $W_2^2(\mathbb{T})$ — это совокупность 2π -периодических функций $x(\cdot)$, у которых первая производная абсолютно непрерывна и $\|x''(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$.

На этом классе рассмотрим задачу восстановления первой производной функции $x(\cdot)$ в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-ijt} dt,$$

заданных с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j , $|j| \leq N$, такие, что

$$(1.15) \quad |x_j - y_j| \leq \delta, \quad |j| \leq N, \quad \delta > 0.$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N , ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ множество $F_\delta^N x(\cdot) = \{y_j\}_{|j| \leq N}$, где y_j удовлетворяют условию (1.15). В качестве методов рассматриваются всевозможные отображения $m: \mathbb{C}^{2N+1} \rightarrow L_2(\mathbb{T})$. Погрешностью данного метода $m(y)(\cdot)$ называется величина

$$e(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ y \in F_\delta^N x(\cdot)}} \|x'(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Задача заключается в нахождении величины

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \inf_{m: \mathbb{C}^{2N+1} \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N, m)$$

и соответствующего оптимального метода.

Аналогично предыдущему нетрудно получить оценку снизу

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ |x_j| \leq \delta, |j| \leq N}} \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Задача справа в силу равенства Парсеваля записывается в виде (для удобства мы переходим к квадрату нормы)

$$(1.16) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 u_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 u_j \leq 1, \quad 0 \leq u_j \leq \delta^2, \quad |j| \leq N,$$

где $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть

$$p_0 = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j| \leq p} j^4 < 1, \quad 0 \leq p \leq N \right\}.$$

Определим последовательность $\{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ равенством

$$\hat{u}_j = \begin{cases} \delta^2, & |j| \leq p_0, \\ \frac{1 - \delta^2 \sum_{|k| \leq p_0} k^4}{2(p_0 + 1)^4}, & |j| = p_0 + 1, \\ 0, & |j| > p_0 + 1. \end{cases}$$

При $p_0 < N$

$$\frac{1 - \delta^2 \sum_{|k| \leq p_0} k^4}{2(p_0 + 1)^4} \leq \delta,$$

т.к. в противном случае

$$1 - \delta^2 \sum_{|k| \leq p_0 + 1} k^4 > 0,$$

что противоречит определению p_0 . Таким образом, последовательность $\hat{u} = \{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ допустима. Подставляя $\hat{u}$ в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, получаем

$$(1.17) \quad E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) \geq \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1}.$$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления. Будем искать его в виде

$$\hat{m}(y)(t) = \sum_{|j| \leq p_0} ij\alpha_j y_j e^{ijt},$$

где α_j некоторые числа (сглаживающие множители). В силу равенства Парсеваля квадрат погрешности данного метода совпадает со значением следующей экстремальной задачи

$$\sum_{|j| \leq p_0} j^2 |x_j - \alpha_j y_j|^2 + \sum_{|j| > p_0} j^2 |x_j|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 \leq 1, \quad |x_j - y_j| \leq \delta, \quad |j| \leq N.$$

Положив $z_j = x_j - y_j$, эту задачу можно переписать в виде

$$(1.18) \quad \sum_{|j| \leq p_0} j^2 |(1 - \alpha_j)x_j + \alpha_j z_j|^2 + \sum_{|j| > p_0} j^2 |x_j|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 \leq 1, \\ |z_j| \leq \delta, \quad |j| \leq N.$$

Из неравенства Коши–Буняковского имеем для $0 < |j| \leq p_0$

$$|(1 - \alpha_j)x_j + \alpha_j z_j|^2 \leq \left(\frac{|1 - \alpha_j|^2}{j^2 \lambda} + \frac{j^2 |\alpha_j|^2}{\lambda_j} \right) (\lambda j^2 |x_j|^2 + j^{-2} \lambda_j |z_j|^2),$$

где λ и λ_j произвольные положительные числа.

Положим $\lambda = (p_0 + 1)^{-2}$, $\lambda_j = j^2 - (p_0 + 1)^{-2} j^4$,

$$\alpha_j = \frac{\lambda_j}{\lambda j^4 + \lambda_j}.$$

Тогда

$$\frac{|1 - \alpha_j|^2}{j^2 \lambda} + \frac{j^2 |\alpha_j|^2}{\lambda_j} = 1.$$

Тем самым

$$|(1 - \alpha_j)x_j + \alpha_j z_j|^2 \leq \lambda j^2 |x_j|^2 + j^{-2} \lambda_j |z_j|^2.$$

Учитывая условия в задаче 1.18, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{|j| \leq p_0} j^2 |(1 - \alpha_j)x_j + \alpha_j z_j|^2 + \sum_{|j| > p_0} j^2 |x_j|^2 \\ & \leq \sum_{|j| \leq p_0} (\lambda j^4 |x_j|^2 + \lambda_j |z_j|^2) + \lambda \sum_{|j| > p_0} j^4 |x_j|^2 = \lambda \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 + \sum_{|j| \leq p_0} \lambda_j |z_j|^2 \\ & \leq \lambda + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} \lambda_j = \frac{1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)}{(p_0 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N, \hat{m}) \leq \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1}.$$

Учитывая (1.17), получаем, что

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1},$$

а метод

$$\hat{m}(y)(t) = \sum_{|j| \leq p_0} ij \left(1 - \left(\frac{j}{p_0 + 1}\right)^2\right) y_j e^{ijt}$$

является оптимальным.

Пользуясь равенствами

$$(1.19) \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(1.20) \quad \sum_{j=1}^n j^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(они могут быть легко доказаны по индукции), будем иметь

$$(1.21) \quad E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \frac{1}{p_0 + 1} \sqrt{1 + \delta^2 \frac{p_0(p_0 + 1)(p_0 + 2)(2p_0 + 1)(2p_0 + 3)}{15}}.$$

Отметим, что если $p_0 < N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье, известных с той же погрешностью δ , не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $2N(\delta)$ коэффициентов Фурье (нулевой коэффициент не используется в оптимальном методе), где

$$N(\delta) = \max \left\{ N \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j| \leq N} j^4 < 1 \right\},$$

позволяет максимально точно восстановить производную функции из $L_2(\mathbb{T})$. Приведем некоторые значения функции $N(\delta)$ и соответствующей погрешности оптимального восстановления.

δ^2	$N(\delta)$	$E^2\left(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^{N(\delta)}\right)$
$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$	0	1
$\left[\frac{1}{34}, \frac{1}{2}\right)$	1	$\frac{1+6\delta^2}{4}$
$\left[\frac{1}{196}, \frac{1}{34}\right)$	2	$\frac{1+56\delta^2}{9}$
$\left[\frac{1}{708}, \frac{1}{196}\right)$	3	$\frac{1+252\delta^2}{16}$

В общем случае, если

$$\left(\sum_{|j|\leq k+1} j^4\right)^{-1/2} \leq \delta < \left(\sum_{|j|\leq k} j^4\right)^{-1/2},$$

то $N(\delta) = k$. Из равенства (1.20) и того, что при всех $n \geq 1$ выполняются неравенства

$$6\left(n + \frac{1}{3}\right)^5 < n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) < 6\left(n + \frac{1}{2}\right)^5,$$

получаются следующие оценки при $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$

$$\left(\frac{5}{2\delta^2}\right)^{1/5} - \frac{3}{2} < N(\delta) < \left(\frac{5}{2\delta^2}\right)^{1/5} - \frac{1}{3}.$$

Пользуясь этими оценками и равенством (1.21), получаем

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^{N(\delta)}) = \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\frac{2\delta^2}{5}\right)^{1/5} + O(\delta^{4/5}).$$

1.6. Интерполяция приближенно заданной функции

Обозначим через $L_2(\mathbb{R})$ пространство функций $x(\cdot)$, определенных на $\mathbb{R}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство локально абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$, а через $W_2^1(\mathbb{R})$ — класс функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$. На классе $W_2^1(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $x(0)$ по информации о самой функции $x(\cdot)$, заданной с погрешностью $\delta > 0$ в норме $L_2(\mathbb{R})$. Иными словами, мы считаем, что для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, такая, что

$$(1.22) \quad \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

Тем самым здесь в качестве информационного оператора F_δ рассматривается многозначное отображение, которое каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$ ставит в соответствие множество функций $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

(1.22). Нас, как и в предыдущих примерах, интересует погрешность оптимального восстановления

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) = \inf_{m: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}} e(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta, m),$$

где

$$e(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} |x(0) - m(y(\cdot))|,$$

а также оптимальный метод восстановления (метод, на котором достигается нижняя грань).

В точности так же, как и раньше, доказывается оценка

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} |x(0)|.$$

Поскольку функция

$$\widehat{x}(t) = \sqrt{\delta} e^{-|t|/\delta}$$

принадлежит классу $W_2^1(\mathbb{R})$ и, кроме того, $\|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta$, то

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \geq \widehat{x}(0) = \sqrt{\delta}.$$

Покажем, что функции из $W_2^1(\mathbb{R})$ ограничены. Пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, а $t_1 \in \Delta = [t_0 - 1/2, t_0, 1/2]$ выбрано из условия

$$|x(t_1)| = \min_{t \in \Delta} |x(t)|.$$

Тогда

$$\int_{\Delta} |x(t)|^2 dt \geq |x(t_1)|^2.$$

Отсюда

$$|x(t_1)| \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Далее,

$$x(t_0) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} x'(t) dt.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|x(t_0)| \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

В силу произвольности t_0 получаем ограниченность $x(\cdot)$.

Для нахождения оптимального метода восстановления воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$(1.23) \quad x(0) = \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x(t) dt - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x'(t) \operatorname{sign} t dt,$$

справедливым для всех $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$. Рассмотрим метод

$$(1.24) \quad m(y(\cdot)) = \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} y(t) dt.$$

Воспользовавшись тождеством (1.23) и применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned} e(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta, m) &= \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})} \sup_{\substack{y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} \left| x(0) - \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} (y(t) - x(t)) dt \right| \leq \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x'(t) \operatorname{sign} t dt \right| \\ &\quad + \frac{\sqrt{\delta}}{2} \leq \sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

Отсюда и соответствующей оценки снизу вытекает равенство

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) = \sqrt{\delta}$$

и оптимальность метода (1.24).

Кроме того, из доказанного следует, что значение задачи

$$(1.25) \quad x(0) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1,$$

равно $\sqrt{\delta}$. Функция $x(\cdot)/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$ для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ является допустимой в задаче (1.25) с $\delta = \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$. Следовательно, для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\frac{|x(0)|}{\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \leq \frac{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2}}{\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2}},$$

т.е.

$$(1.26) \quad |x(0)| \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2} \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2}.$$

В силу инвариантности нормы относительно сдвига точку 0 можно заменить на любую точку $\tau \in \mathbb{R}$.

Полученное неравенство можно рассматривать как некоторый принцип неопределенности для функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$, означающий, что при фиксированном значении функции в произвольной точке нормы функции и ее производной не могут быть одновременно малы — их произведение всегда не меньше квадрата этого значения.

1.7. Нахождение решения уравнения теплопроводности по неточным начальным данным

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности

$$(1.27) \quad \begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

Хорошо известно, что решение этой задачи дается равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) e^{-k^2 t} \sin kx,$$

где

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx.$$

Нас будет интересовать вопрос как наилучшим образом восстановить решение задачи (1.27) в момент времени $t = T$, если вычислено лишь конечное число коэффициентов Фурье $b_1(f), \dots, b_N(f)$ и вычисления проведены с некоторой погрешностью.

Будем предполагать, что

$$f(\cdot) \in \mathring{W}_2^1([0, \pi]) = \{ f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1([0, \pi]) : \|f'(\cdot)\|_{L_2([0, \pi])} \leq 1, f(0) = f(\pi) = 0 \},$$

где

$$\mathcal{W}_2^1([0, \pi]) = \{ f(\cdot) \in L_2([0, \pi]) : f(\cdot) - \text{абс. непр. на } [0, \pi], \|f'(\cdot)\|_{L_2([0, \pi])} < \infty \},$$

а

$$\|g(\cdot)\|_{L_2([0, \pi])} = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Считается, что для каждой функции $f(\cdot) \in \mathring{W}_2^1([0, \pi])$ нам известны числа y_k , $k = 1, \dots, N$, такие, что

$$(1.28) \quad |b_k(f) - y_k| \leq \delta, \quad k = 1, \dots, N, \quad \delta > 0.$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N , ставящее в соответствие каждой функции $f(\cdot) \in \mathring{W}_2^1([0, \pi])$ множество $F_\delta^N f(\cdot) = \{y_k\}_{k=1}^N$, где y_k удовлетворяют условию (1.28).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2([0, \pi])$. Погрешностью восстановления для данного метода m назовем величину

$$\begin{aligned} e(T, \mathring{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N, m) \\ = \sup_{f(\cdot) \in \mathring{W}_2^1([0, \pi])} \sup_{\substack{y_1, \dots, y_N \\ |b_k(f) - y_k| \leq \delta, k=1, \dots, N}} \|u(\cdot, T) - m(y)(\cdot)\|_{L_2([0, \pi])}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, \mathring{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2([0, \pi])} e(T, \mathring{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N, m).$$

Тем же приемом, который использовался ранее, получаем оценку снизу

$$(1.29) \quad E(T, \mathring{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N) \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathring{W}_2^1([0, \pi]) \\ |b_k(f)| \leq \delta, k=1, \dots, N}} \|u(\cdot, T)\|_{L_2([0, \pi])}.$$

Экстремальная задача, стоящая в правой части равенства (1.29) может быть переписана в следующем виде (для удобства мы переходим к квадрату ее значения)

$$(1.30) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(f) e^{-2k^2 T} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(f) k^2 \leq 1, \quad b_k^2(f) \leq \delta^2, \quad k = 1, \dots, N.$$

Положим $u_k = b_k^2(f)$. Тогда задача (1.30) примет вид

$$(1.31) \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{-2k^2 T} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^2 \leq 1, \quad 0 \leq u_k \leq \delta^2, \quad k = 1, \dots, N.$$

Пусть

$$n = \max \left\{ m \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{k=1}^m k^2 < 1, \quad 0 \leq m \leq N \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что последовательность

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \delta^2, & k = 1, \dots, n, \\ \frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n k^2}{(n+1)^2}, & k = n+1, \\ 0, & k = n+2, \dots, \end{cases}$$

является допустимой в задаче (1.31). Подставляя $\{\hat{u}_k\}_1^\infty$ в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, находим

$$E(T, \overset{\circ}{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N) \geq \sqrt{\delta^2 \sum_{k=1}^n e^{-2k^2 T} + \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n k^2\right) (n+1)^{-2} e^{-2(n+1)^2 T}}.$$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления. Будем искать его в виде

$$(1.33) \quad \hat{m}(y)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k e^{-k^2 T} \sin kx,$$

где α_k некоторые числа (сглаживающие множители). В силу равенства Парсеваля квадрат погрешности данного метода совпадает со значением следующей экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^n |b_k(f) - \alpha_k y_k|^2 e^{-2k^2 T} + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2(f) e^{-2k^2 T} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(f) k^2 \leq 1, \\ |b_k(f) - y_k| \leq \delta, \quad k = 1, \dots, N.$$

Положив $z_k = b_k(f) - y_k$, эту задачу можно переписать в виде

$$(1.34) \quad \sum_{k=1}^n |(1 - \alpha_k) b_k(f) + \alpha_k z_k|^2 e^{-2k^2 T} + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2(f) e^{-2k^2 T} \rightarrow \max, \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(f) k^2 \leq 1, \quad |z_k| \leq \delta, \quad k = 1, \dots, N.$$

Из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|(1 - \alpha_k) b_k(f) + \alpha_k z_k|^2 \leq \left(\frac{|1 - \alpha_k|^2}{k^2 \lambda} + \frac{|\alpha_k|^2}{\lambda_k} \right) (\lambda k^2 b_k^2(f) + \lambda_k z_k^2),$$

где λ и λ_j произвольные положительные числа.

Положим $\lambda = (n+1)^{-2} e^{-2(n+1)^2 T}$, $\lambda_k = e^{-2k^2 T} - \lambda k^2$,

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda k^2}.$$

Тогда

$$\frac{|1 - \alpha_k|^2}{k^2 \lambda} + \frac{|\alpha_k|^2}{\lambda_k} = e^{2k^2 T}.$$

Следовательно,

$$|(1 - \alpha_k) b_k(f) + \alpha_k z_k|^2 \leq e^{2k^2 T} (\lambda k^2 b_k^2(f) + \lambda_k z_k^2).$$

Учитывая условия в задаче 1.34, получаем

$$\sum_{k=1}^n |(1 - \alpha_k) b_k(f) + \alpha_k z_k|^2 e^{-2k^2 T} + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2(f) e^{-2k^2 T} \leq \\ \sum_{k=1}^n (\lambda k^2 b_k^2(f) + \lambda_k z_k^2) + \lambda \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2(f) k^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(f) k^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k^2 \leq \lambda + \delta^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \\ = \delta^2 \sum_{k=1}^n e^{-2k^2 T} + \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n k^2\right) (n+1)^{-2} e^{-2(n+1)^2 T}.$$

Таким образом,

$$e(T, \mathring{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N, \hat{m}) \leq \sqrt{\delta^2 \sum_{k=1}^n e^{-2k^2 T} + \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n k^2\right) (n+1)^{-2} e^{-2(n+1)^2 T}}.$$

Из (1.32) вытекает, что

$$E(T, \mathring{W}_2^1([0, \pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=1}^n e^{-2k^2 T} + \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n k^2\right) (n+1)^{-2} e^{-2(n+1)^2 T}},$$

а метод (1.33), который можно записать в виде

$$\hat{m}(y)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 e^{-2((n+1)^2 - k^2)T}\right) y_k e^{-k^2 T} \sin kx,$$

является оптимальным.

Здесь так же, как и в задаче восстановления производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье, рассмотренной в п. 1.5, если $n < N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$, известных с той же погрешностью δ , не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $N(\delta)$ коэффициентов Фурье, где

$$N(\delta) = \max \left\{ m \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{k=1}^m k^2 < 1 \right\},$$

позволяет максимально точно восстановить решение задачи (1.27) в момент времени $t = T$.

Из равенства (1.19) и легко проверяемых неравенств

$$\left(n + \frac{1}{3}\right)^3 < n(n+1) \left(n + \frac{1}{2}\right) < \left(n + \frac{1}{2}\right)^3,$$

получаются следующие оценки при $0 < \delta < 1$

$$\left(\frac{3}{\delta^2}\right)^{1/3} - \frac{3}{2} < N(\delta) < \left(\frac{3}{\delta^2}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}.$$

1.8. Комментарии

В этой главе в качестве примеров характерных задач оптимального восстановления были рассмотрены простейшие задачи разных типов. Для каждой из них дается полное решение с указанием точного выражения для погрешности оптимального восстановления и соответствующего оптимального метода восстановления. Большинство примеров взято из статьи [55]. Неравенство (1.26) является частным случаем хорошо известного неравенства Тайкова [97]. Задача, рассматриваемая в п. 1.7, взята из статьи [12].

Общая теория

2.1. Постановка задачи оптимального восстановления

Общая задача оптимального восстановления операторов по неточно заданной информации может быть поставлена следующим образом. Пусть X и Y — линейные пространства, Z — линейное нормированное пространство и $L: X \rightarrow Z$ — линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора L на некотором множестве $W \subset X$ по значениям *многозначного отображения* (м. о.) $F: W \rightarrow Y$, под которым понимается отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in W$ непустое множество $F(x) \subset Y$. Множество

$$\text{gr } F := \{ (x, y) : x \in W, y \in F(x) \}$$

называется *графиком м. о. F* .

Многозначность отображения F моделирует неточно заданную информацию об элементах W . Если F — однозначное отображение, то говорят о задаче восстановления по точным данным. Часто в задачах восстановления рассматривают отображения вида

$$(2.1) \quad F(x) = Ix + U,$$

где $I: X \rightarrow Y$ — линейный оператор, называемый *информационным*, а U — некоторое фиксированное множество из Y . Например, если Y — нормированное пространство, то в качестве U рассматривают шар радиуса δ . При этом говорят, что значения информационного оператора I заданы с погрешностью δ .

Под *методами восстановления* оператора L будем понимать всевозможные отображения $\varphi: F(W) \rightarrow Z$ (при этом никаких дополнительных свойств от этих отображений, вообще говоря, мы не требуем). Таким образом, имеем следующую диаграмму.

$$\begin{array}{ccc} X \supset W & \xrightarrow{L} & Z \\ & \searrow F & \nearrow \varphi \\ & F(W) & \end{array}$$

Погрешностью метода восстановления φ назовем величину

$$e(L, F, \varphi) = \sup_{(x, y) \in \text{gr } F} \|Lx - \varphi(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$(2.2) \quad E(L, F) = \inf_{\varphi: F(W) \rightarrow Z} e(L, F, \varphi).$$

Метод $\hat{\varphi}$ называется *оптимальным*, если

$$e(L, F, \hat{\varphi}) = E(L, F).$$

Задачу нахождения величины погрешности оптимального восстановления и оптимальных методов будем называть *задачей оптимального восстановления* (значений оператора L на классе W по информации F), или кратко, (L, F) -задачей.

Отметим, что задача оптимального восстановления с многозначным отображением вида (2.1) может быть сведена к задаче оптимального восстановления с однозначным отображением. Для того, чтобы убедиться в этом, надо вместо X рассмотреть линейное пространство $\tilde{X} = X \times Y$, вместо множества W — множество $\tilde{W} = W \times U$, вместо оператора L — оператор $\tilde{L}(x, y) = Lx$, а однозначное отображение $\tilde{F}$ определить равенством $\tilde{F}(x, y) = Ix + y$.

Тогда для любого метода φ

$$e(\tilde{L}, \tilde{F}, \varphi) = \sup_{x \in W, y \in U} \|Lx - \varphi(Ix + y)\|_Z = \sup_{(x, v) \in \text{gr } F} \|Lx - \varphi(v)\|_Z = e(L, F, \varphi).$$

Отсюда

$$E(\tilde{L}, \tilde{F}) = E(L, F).$$

Тем самым задача восстановления с неточными данными может быть сведена к задаче восстановления с точными данными.

ЛЕММА 2.1. Пусть в задаче (2.2) множество $\text{gr } F$ центрально-симметрично, а множество

$$F^{-1}(0) = \{x \in W : 0 \in F(x)\}$$

не пусто. Тогда

$$E(L, F) \geq \sup_{x \in F^{-1}(0)} \|Lx\|_Z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого метода φ при всех $x \in W$ таких, что $x \in F^{-1}(0)$, имеем

$$2\|Lx\|_Z \leq \|Lx - \varphi(0)\|_Z + \|L(-x) - \varphi(0)\|_Z \leq 2e(L, F, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(L, F, \varphi) \geq \sup_{x \in F^{-1}(0)} \|Lx\|_Z,$$

откуда сразу же вытекает доказываемая оценка. $\square$

Введем величину, которая в некотором смысле характеризует “разброс” значений оператора L на множестве элементов из W с одной и той же информацией. Пусть $y \in F(W)$. Число

$$r(L, F, y) = \inf_{z \in Z} \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - z\|_Z$$

называется *чебышевским радиусом* множества $L(F^{-1}(y))$. Это радиус минимального шара, содержащего данное множество. Если существует такое $z(y) \in Z$, что

$$r(L, F, y) = \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - z(y)\|_Z,$$

то $z(y)$ называется *чебышевским центром* множества $L(F^{-1}(y))$.

Величина

$$(2.3) \quad R(L, F) = \sup_{y \in F(W)} r(L, F, y)$$

называется *радиусом информации* в задаче оптимального восстановления.

Следующая лемма дает геометрическую характеристику величины погрешности оптимального восстановления.

ЛЕММА 2.2. *Имеет место равенство*

$$E(L, F) = R(L, F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ — произвольный метод восстановления. Тогда для любого $y \in F(W)$

$$r(L, F, y) \leq \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - \varphi(y)\|_Z \leq e(L, F, \varphi).$$

Перейдя к верхней грани в левой части по всем $y \in F(W)$, а затем к нижней грани по всевозможным методам, получим

$$R(L, F) \leq E(L, F).$$

Докажем противоположное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $y \in F(W)$ найдется элемент $z_\varepsilon(y) \in Z$ такой, что

$$\sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - z_\varepsilon(y)\|_Z \leq r(L, F, y) + \varepsilon.$$

Определим метод $\varphi_\varepsilon: F(W) \rightarrow Z$ по правилу $\varphi_\varepsilon(y) = z_\varepsilon(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} e(L, F, \varphi_\varepsilon) &= \sup_{(x, y) \in \text{gr } F} \|Lx - \varphi_\varepsilon(y)\|_Z = \sup_{y \in F(W)} \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - \varphi_\varepsilon(y)\|_Z \\ &\leq \sup_{y \in F(W)} (r(L, F, y) + \varepsilon) = R(L, F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(L, F) \leq R(L, F) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$E(L, F) \leq R(L, F).$$

Что вместе с противоположным неравенством доказывает утверждение леммы. $\square$

Отметим, что из доказательства леммы сразу следует, что если для каждого $y \in F(W)$ существует чебышевский центр $z(y)$ множества $L(F^{-1}(y))$, то метод $\varphi(y) = z(y)$ является оптимальным. Такой оптимальный метод называют *центральным методом*. В п.п. 1.1–1.3 приводились примеры центральных алгоритмов.

2.2. Оптимальное восстановление линейных функционалов

Пусть X' — линейное пространство, алгебраически сопряженное к X , т.е. пространство линейных функционалов на X . Рассмотрим задачу (2.2), когда $L = x' \in X'$. Значение линейного функционала x' на элементе x мы будем обозначать через $\langle x', x \rangle$. В этом случае $Z = K$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, вещественное или комплексное пространство X).

Напомним, что подмножество линейного пространства X называется *выпуклым*, если с любыми двумя своими точками $x_1, x_2 \in X$ оно содержит отрезок $[x_1, x_2] = \{z \in X \mid z = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \leq \alpha \leq 1\}$, соединяющий эти точки. Наименьшее выпуклое множество, содержащее множество $A \subset X$ называется *выпуклой оболочкой* множества A и обозначается $\text{co } A$. Она состоит из всех выпуклых комбинаций элементов из A , т.е. элементов вида $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$, где $x_j \in A$, $\lambda_j \geq 0$, и $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$.

Многозначное отображение $F: W \rightarrow Y$ называется *выпуклым*, если его график — выпуклое множество. Каждому многозначному отображению $F: W \rightarrow Y$ можно сопоставить выпуклое многозначное отображение $\text{co } F: W \rightarrow Y$ по правилу

$$\text{co } F(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \text{co gr } F\}.$$

Легко видеть, что $\text{gr } \text{co } F = \text{co } \text{gr } F$.

Функция $f: X \rightarrow K$ называется аффинной, если $f(x) = \langle x', x \rangle + a$, где $x' \in X'$ и $a \in K$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть X и Y — вещественные линейные пространства, $W \subset X$, $F: W \rightarrow Y$ и $x' \in X'$. Тогда для существования аффинного оптимального метода в задаче восстановления функционала x' необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.4) \quad R(x', F) = R(x', \text{co } F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Докажем, что из существования аффинного оптимального метода вытекает равенство (2.4). Сначала покажем, что для произвольного аффинного метода $\varphi: F(W) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \langle y', y \rangle + a$, справедливо соотношение

$$(2.5) \quad e(x', F, \varphi) = e(x', \text{co } F, \varphi).$$

Действительно, ясно, что $e(x', F, \varphi) \leq e(x', \text{co } F, \varphi)$. Докажем противоположное неравенство. Пусть $(x, y) \in \text{gr } \text{co } F$. Тогда найдутся такие $(x_j, y_j) \in \text{gr } F$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, что

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j, y_j)$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} |\langle x', x \rangle - \varphi(y)| &= |\langle x', x \rangle - \langle y', y \rangle - a| = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j (\langle x', x_j \rangle - \langle y', y_j \rangle - a) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |\langle x', x_j \rangle - \langle y', y_j \rangle - a| \leq e(x', F, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $e(x', \text{co } F, \varphi) \leq e(x', F, \varphi)$ и тем самым соотношение (2.5) доказано.

Пусть теперь $\widehat{\varphi}$ — аффинный оптимальный метод в (x', F) -задаче. Тогда, пользуясь леммой 2.2 и (2.5), получаем

$$R(x', \text{co } F) = E(x', \text{co } F) \leq e(x', \text{co } F, \widehat{\varphi}) = e(x', F, \widehat{\varphi}) = E(x', F) = R(x', F).$$

Противоположное неравенство $R(x', \text{co } F) \geq R(x', F)$ очевидно и поэтому равенство (2.4) доказано.

Достаточность. Если $R(x', F) = +\infty$, то равенство (2.4) выполняется очевидным образом ($(R(x', F) \leq R(x', \text{co } F))$). Тогда $E(x', F) = +\infty$ по лемме (2.2) и, следовательно, любой метод оптимален, в частности, любой аффинный. Итак, пусть выполнено соотношение (2.4) и $R(x', F) < +\infty$.

Покажем сначала, что в $(x', \text{co } F)$ -задаче существует аффинный оптимальный метод. Далее, для краткости, пишем R вместо $R(x', \text{co } F)$.

Положим

$$\Omega = \{ (y, \langle x', x \rangle) \in Y \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in \text{gr } \text{co } F \} \quad \text{и} \quad \Omega_0 = \Omega - \Omega.$$

Нетрудно убедиться, что Ω — выпуклое множество, а Ω_0 — выпукло и центрально-симметрично.

Пусть $\mu(\cdot)$ — функционал Минковского множества Ω_0 , т. е.

$$\mu(\omega) = \inf \{ t > 0 \mid \omega \in t\Omega_0 \},$$

где $\mu(\omega) = +\infty$, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто (см. 7.2).

Положим

$$p(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \mu(\omega) = +\infty, \\ 2R\mu(\omega), & \mu(\omega) < +\infty. \end{cases}$$

Рассмотрим линейный функционал ω'_0 , определенный на подпространстве $\{0\} \times \mathbb{R} \subset Y \times \mathbb{R}$ равенством $\langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$. Покажем, что для всех $\omega \in \{0\} \times \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$(2.6) \quad |\langle \omega'_0, \omega \rangle| \leq p(\omega).$$

Если $p(\omega) = +\infty$, то неравенство (2.6) очевидно. Пусть $p(\omega) < +\infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon = \frac{\omega}{\mu(\omega) + \varepsilon}.$$

Так как функционал Минковского положительно однороден (см. 7.2), то $\mu(\omega_\varepsilon) < 1$. Отсюда, поскольку Ω_0 выпукло и содержит ноль, следует, что $\omega_\varepsilon \in \Omega_0$ и значит, $\omega_\varepsilon = (y_1, \langle x', x_1 \rangle) - (y_2, \langle x', x_2 \rangle)$ для некоторых $x_j \in F^{-1}(y_j)$, $j = 1, 2$. Но $\omega_\varepsilon \in \{0\} \times \mathbb{R}$ и поэтому $y_1 = y_2 = y$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| &= |\langle x', x_1 \rangle - \langle x', x_2 \rangle| \leq |\langle x', x_1 \rangle - c| + |\langle x', x_2 \rangle - c| \\ &\leq 2 \sup_{x \in F^{-1}(y)} |\langle x', x \rangle - c| \end{aligned}$$

для любого $c \in \mathbb{R}$, откуда (переходя справа к нижней грани по всем $c \in \mathbb{R}$) вытекает, что

$$|\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq 2r(x', F, y) \leq 2R.$$

Тогда

$$|\langle \omega'_0, \omega \rangle| = (\mu(\omega) + \varepsilon) |\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq (\mu(\omega) + \varepsilon) 2R = p(\omega) + 2R\varepsilon,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ неравенство (2.6) доказано.

По теореме Хана–Банаха (см. 7.2) существует функционал ω' , являющийся продолжением ω'_0 на $Y \times \mathbb{R}$, и при этом справедливо неравенство

$$(2.7) \quad |\langle \omega', \omega \rangle| \leq p(\omega), \quad \forall \omega \in Y \times \mathbb{R}.$$

Так как $\omega' \in (Y \times \mathbb{R})'$, то $\omega' = (\tilde{y}', \tilde{\alpha})$, где $\tilde{y}' \in Y'$ и $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, т. е. $\langle \omega', (y, r) \rangle = \langle \tilde{y}', y \rangle + \tilde{\alpha}r$ для всех $y \in Y$ и $r \in \mathbb{R}$. На $\{0\} \times \mathbb{R}$ имеем $\tilde{\alpha}r = \langle \omega', (0, r) \rangle = \langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$ и поэтому $\tilde{\alpha} = 1$. Полагая $y' = -\tilde{y}'$, получаем, что

$$(2.8) \quad \langle \omega', (y, r) \rangle = -\langle y', y \rangle + r, \quad \forall (y, r) \in Y \times \mathbb{R}.$$

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{gr so } F$. Тогда $\omega = (y_1, \langle x', x_1 \rangle) - (y_2, \langle x', x_2 \rangle) \in \Omega_0$ и тем самым $\mu(\omega) \leq 1$. Учитывая это обстоятельство, из (2.8) и (2.7) следует, что

$$\langle \omega', \omega \rangle = -\langle y', y_1 - y_2 \rangle + \langle x', x_1 - x_2 \rangle \leq p(\omega) = 2R\mu(\omega) \leq 2R,$$

или

$$\langle x', x_1 \rangle - \langle y', y_1 \rangle - R \leq \langle x', x_2 \rangle - \langle y', y_2 \rangle + R.$$

Найдется $a \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{gr so } F$

$$\langle x', x_1 \rangle - \langle y', y_1 \rangle - R \leq a \leq \langle x', x_2 \rangle - \langle y', y_2 \rangle + R.$$

Отсюда вытекает, что для всех $(x, y) \in \text{gr so } F$

$$|\langle x', x \rangle - \langle y', y \rangle - a| \leq R,$$

т. е. для аффинного метода $\hat{\varphi}(y) = \langle y', y \rangle + a$ справедлива оценка

$$e(x', \text{so } F, \hat{\varphi}) \leq R.$$

Величина справа, согласно лемме 2.2, равна $E(x', \text{so } F)$ и поэтому метод $\hat{\varphi}$ оптимален в $(x', \text{so } F)$ -задаче, т. е.

$$(2.9) \quad e(x', \text{so } F, \hat{\varphi}) = E(x', \text{so } F).$$

Этот же метод является оптимальным в (x', F) -задаче. Действительно, из (2.5), (2.9), леммы 2.2, равенства (2.4) и снова леммы 2.2 имеем

$$e(x', F, \widehat{\varphi}) = e(x', \text{co } F, \widehat{\varphi}) = E(x', \text{co } F) = R(x', \text{co } F) = R(x', F) = E(x', F)$$

и таким образом, $\widehat{\varphi}$ — аффинный оптимальный метод в (x', F) -задаче. $\square$

Если X — комплексное пространство, то аффинного оптимального метода в (x', F) -задаче, вообще говоря, не существует. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.1. Пусть $X = Y = \mathbb{C}$, $W = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| + 2|\operatorname{Im} z| \leq 1\}$, $\langle z', z \rangle = z$, $F(z) = \operatorname{Re} z + [-\delta, \delta]$, где $0 < \delta < 2/15$. Положим

$$\varphi_0(y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq 2\delta, \\ y, & |y| > 2\delta. \end{cases}$$

Тогда, если $|y| \leq 2\delta$, то

$$\sup_{\substack{(z,y) \in \operatorname{gr} F \\ |y| \leq 2\delta}} |z - \varphi_0(y)| = \sup_{\substack{z \in W, y \in [-2\delta, 2\delta] \\ |\operatorname{Re} z - y| \leq \delta}} |z|.$$

В силу того, что

$$|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re} z - y + y| \leq |\operatorname{Re} z - y| + |y| \leq 3\delta \leq \frac{2}{5},$$

имеем

$$\sup_{\substack{(z,y) \in \operatorname{gr} F \\ |y| \leq 2\delta}} |z - \varphi_0(y)| \leq \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \frac{2}{5}}} |z| = \frac{1}{2}.$$

Если $|y| > 2\delta$, то $|\operatorname{Re} z| \geq |y| - |\operatorname{Re} z - y| > \delta$. Следовательно, $|\operatorname{Im} z| < (1 - \delta)/2$. Поэтому

$$\sup_{\substack{(z,y) \in \operatorname{gr} F \\ |y| > 2\delta}} |z - \varphi_0(y)| \leq \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z - y| \leq \delta \\ |\operatorname{Im} z| < (1-\delta)/2}} |z - y| < \sqrt{\delta^2 + (1 - \delta)^2/4} < \frac{1}{2}.$$

Тем самым

$$E(z', F) \leq e(z', F, \varphi_0) \leq \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, для любого аффинного метода $\varphi(y) = c_1 y + i c_2 y + \alpha$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, имеем

$$\sup_{(z,y) \in \operatorname{gr} F} |z - \varphi(y)| \geq \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \delta}} |z - \varphi(0)| = \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \delta}} |z - \alpha| \geq \frac{1}{2}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то последнее неравенство строгое и, следовательно,

$$e(z', F, \varphi) > \frac{1}{2}.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$e(z', F, \varphi) = \sup_{(z,y) \in \operatorname{gr} F} \sqrt{(\operatorname{Re} z - c_1 y)^2 + (\operatorname{Im} z - c_2 y)^2}.$$

При $c_1 \leq 0$, рассмотрев точку $(1, 1) \in \operatorname{gr} F$, будем иметь

$$e(z', F, \varphi) \geq \sqrt{(1 - c_1)^2 + c_2^2} \geq 1.$$

При $c_1 > 0$, рассмотрев точку $(i/2, \delta \operatorname{sign} c_2) \in \operatorname{gr} F$, получим

$$e(z', F, \varphi) \geq \sqrt{c_1^2 \delta^2 + \left(\frac{1}{2} + |c_2| \delta\right)^2} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого аффинного метода $\varphi(\cdot)$

$$e(z', F, \varphi) > \frac{1}{2} \geq E(z', F).$$

Множество A в линейном пространстве X называется *уравновешенным*, если из того, что $x \in A$ и $|\lambda| = 1$ следует, что $\lambda x \in A$. Если X — вещественное пространство, то это равносильно центральной симметричности множества A .

Если $A \subset X$, то через $\text{bco } A$ обозначим наименьшее выпуклое уравновешенное множество, содержащее A . Оно состоит из всех элементов вида $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$, где $x_j \in A$, $\lambda_j \in K$, $j = 1, \dots, m$, и $\sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq 1$.

Пусть X и Y — векторные пространства и $W \subset X$. Сопоставим многозначному отображению $F: W \rightarrow Y$ выпуклое уравновешенное многозначное отображение $\text{bco } F: \text{bco } W \rightarrow Y$ по правилу

$$(2.10) \quad \text{bco } F(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \text{bco } \text{gr } F\}.$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X и Y — линейные пространства над полем K вещественных или комплексных чисел, $W \subset X$, $F: W \rightarrow Y$ и $x' \in X'$. Тогда для существования линейного оптимального метода в (x', F) -задаче необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.11) \quad R(x', F) = R(x', \text{bco } F).$$

При этом

$$(2.12) \quad E(x', F) = \sup_{x \in \text{bco } F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость равенства (2.11) доказывается точно так же, как в предыдущей теореме. Докажем его достаточность. Заметим, что если $R(x', F) = +\infty$, то равенство (2.11) выполняется автоматически и $E(x', F) = +\infty$ согласно лемме 2.2. Следовательно, в этом случае любой метод оптимален и, в частности, любой линейный.

Пусть выполнено соотношение (2.11) и $R(x', F) < +\infty$. Покажем, что тогда величина в правой части (2.12) также конечна. Для этого докажем неравенство

$$(2.13) \quad \sup_{x \in \text{bco } F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle| \leq R(x', \text{bco } F).$$

Действительно, если $(x_0, 0) \in \text{gr } \text{bco } F$, то и $(-x_0, 0) \in \text{gr } \text{bco } F$ в силу уравновешенности множества $\text{gr } \text{bco } F$, и мы имеем для любого $c \in K$

$$2|\langle x', x_0 \rangle| \leq |\langle x', x_0 \rangle - c| + |\langle x', -x_0 \rangle - c| \leq 2 \sup_{x \in \text{bco } F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle - c|.$$

Переходя слева к верхней грани по всем $x \in \text{bco } F^{-1}(0)$, справа — к нижней грани по всем $c \in K$ и затем оценивая полученное выражение справа величиной $R(x', \text{bco } F)$, приходим к (2.13). Итак, если $R(x', F) < +\infty$ и выполнено (2.11), то $R(x', \text{bco } F) < +\infty$ и из (2.13), получаем, что величина справа в (2.12) конечна.

Покажем теперь, что в $(x', \text{bco } F)$ -задаче существует линейный оптимальный метод. Здесь рассуждения аналогичны тем, которые были в теореме 2.3. Положим

$$\Omega = \{(y, \langle x', x \rangle) \in Y \times K \mid (x, y) \in \text{gr } \text{bco } F\}.$$

Легко видеть, что это выпуклое уравновешенное множество. Функционал Минковского $\mu(\cdot)$ множества Ω имеет вид

$$\mu(\omega) = \inf\{t > 0 \mid \omega \in t\Omega\},$$

причем $\mu(\omega) = +\infty$, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто. Положим

$$p(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \mu(\omega) = +\infty, \\ \rho\mu(\omega), & \mu(\omega) < +\infty, \end{cases}$$

где через ρ обозначена величина в правой части равенства (2.12). Рассмотрим линейный функционал ω'_0 , определенный на подпространстве $\{0\} \times K \subset Y \times K$ равенством $\langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$. Покажем, что для всех $\omega \in \{0\} \times K$ выполнено соотношение

$$(2.14) \quad |\langle \omega'_0, \omega \rangle| \leq p(\omega).$$

Если $p(\omega) = +\infty$, то неравенство (2.14) очевидно. Пусть $p(\omega) < +\infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon = \frac{\omega}{\mu(\omega) + \varepsilon}.$$

Тогда $\mu(\omega_\varepsilon) < 1$ и $\omega_\varepsilon \in \Omega$ (в силу выпуклости и уравновешенности Ω). Далее, очевидно, $\omega_\varepsilon \in \{0\} \times K$ и тем самым $\omega_\varepsilon = (0, \langle x', x_\varepsilon \rangle)$ для некоторого $x_\varepsilon \in \text{bco } F^{-1}(0)$. Следовательно,

$$|\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| = |\langle x', x_\varepsilon \rangle| \leq \sup_{x \in \text{bco } F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle| = \rho,$$

откуда

$$|\langle \omega'_0, \omega \rangle| = (\mu(\omega) + \varepsilon) |\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq (\mu(\omega) + \varepsilon) \rho = p(\omega) + \rho\varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает неравенство (2.14).

По теореме Хана–Банаха существует функционал ω' , являющийся продолжением ω'_0 на $Y \times K$, и при этом справедливо неравенство

$$(2.15) \quad |\langle \omega', \omega \rangle| \leq p(\omega), \quad \forall \omega \in Y \times K.$$

Пусть $\omega' = (-y', \tilde{\alpha})$, $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$. Тогда в силу того, что $\langle \omega', (0, r) \rangle = \langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$, $\tilde{\alpha} = 1$. Тем самым

$$(2.16) \quad \langle \omega', (y, r) \rangle = -\langle y', y \rangle + r, \quad \forall (y, r) \in Y \times K.$$

Пусть $(x, y) \in \text{gr bco } F$. Тогда $\omega = (y, \langle x', x \rangle) \in \Omega$ и значит, $\mu(\omega) \leq 1$. Отсюда, из (2.16) и (2.15) получаем

$$|\langle \omega', \omega \rangle| = |\langle x', x \rangle - \langle y', y \rangle| \leq p(\omega) = \rho\mu(\omega) \leq \rho,$$

т. е. для линейного метода $\widehat{\varphi}(y) = \langle y', y \rangle$ выполняется оценка

$$(2.17) \quad e(x', \text{bco } F, \widehat{\varphi}) \leq \rho.$$

Из (2.17), (2.13) и леммы (2.2) следует, что

$$(2.18) \quad e(x', \text{bco } F, \widehat{\varphi}) \leq \rho \leq R(x', \text{bco } F) = E(x', \text{bco } F),$$

и значит, линейный метод $\widehat{\varphi}(y) = \langle y', y \rangle$ оптимален в $(x', \text{bco } F)$ -задаче. Этот же метод является оптимальным и в (x', F) -задаче. Действительно, так же, как и при доказательстве теоремы 2.3, проверяется, что для любого линейного метода φ справедливо соотношение (см. (2.5))

$$(2.19) \quad e(x', F, \varphi) = e(x', \text{bco } F, \varphi).$$

Тогда из (2.19), (2.18), равенства (2.11) и леммы 2.2 имеем

$$E(x', F) \leq e(x', F, \widehat{\varphi}) = e(x', \text{bco } F, \widehat{\varphi}) \leq \rho \leq$$

$$R(x', \text{bco } F) = R(x', F) = E(x', F),$$

т. е. $\widehat{\varphi}$ — линейный оптимальный метод в (x', F) -задаче и справедливо равенство (2.12). $\square$

Если множество $\text{gr } F$ уравновешенно (а значит, и множества $F^{-1}(0)$), то в силу равенства (2.12) для нахождения погрешности оптимального восстановления $E(x', F)$ достаточно решить экстремальную задачу

$$(2.20) \quad \text{Re}\langle x', x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in F^{-1}(0).$$

Элемент $\hat{x} \in F^{-1}(0)$, для которого

$$\langle x', \hat{x} \rangle = \sup_{x \in F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle|,$$

будем называть *экстремальным* в задаче (2.20). Решение задачи (2.20) с помощью принципа Лагранжа часто позволяет найти и оптимальный метод восстановления. Свяжем с (2.20) следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}((x, y), \lambda) = -\text{Re}\langle x', x \rangle + \text{Re}\langle \lambda, y \rangle,$$

где $\lambda \in Y'$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\text{gr } F$ — выпуклое уравновешенное множество. Элемент $\hat{x} \in F^{-1}(0)$ является экстремальным, а линейный функционал $\hat{\lambda} \in Y'$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если

$$(2.21) \quad \min_{(x, y) \in \text{gr } F} \mathcal{L}((x, y), \hat{\lambda}) = \mathcal{L}((\hat{x}, 0), \hat{\lambda}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x}$ — экстремальный элемент в задаче (2.20), а $\hat{\lambda}$ — оптимальный метод восстановления. Тогда, учитывая уравновешенность $\text{gr } F$ и равенство (2.12), будем иметь

$$\begin{aligned} \min_{(x, y) \in \text{gr } F} \mathcal{L}((x, y), \hat{\lambda}) &= - \sup_{(x, y) \in \text{gr } F} \text{Re} \left(\langle x', x \rangle - \langle \hat{\lambda}, y \rangle \right) \\ &= - \sup_{(x, y) \in \text{gr } F} |\langle x', x \rangle - \langle \hat{\lambda}, y \rangle| = -E(x', F) = -\langle x', \hat{x} \rangle = \mathcal{L}((\hat{x}, 0), \hat{\lambda}). \end{aligned}$$

Обратно, пусть справедливо равенство (2.21) для некоторого $\hat{x} \in F^{-1}(0)$ и $\hat{\lambda} \in Y'$. Тогда при всех $x \in F^{-1}(0)$

$$\begin{aligned} -\text{Re}\langle x', x \rangle &= -\text{Re}\langle x', x \rangle + \text{Re}\langle \hat{\lambda}, 0 \rangle \geq \min_{(x, y) \in \text{gr } F} \mathcal{L}((x, y), \hat{\lambda}) \\ &= \mathcal{L}((\hat{x}, 0), \hat{\lambda}) = -\text{Re}\langle x', \hat{x} \rangle, \end{aligned}$$

т. е. $\hat{x}$ — решение задачи (2.20). Кроме того, в силу уравновешенности и (2.21)

$$\sup_{(x, y) \in \text{gr } F} |\langle x', x \rangle - \langle \hat{\lambda}, y \rangle| = - \min_{(x, y) \in \text{gr } F} \mathcal{L}((x, y), \hat{\lambda}) = \langle x', \hat{x} \rangle = E(x', F),$$

что означает оптимальность метода $\hat{\lambda}$. $\square$

Пусть многозначное отображение F имеет вид

$$F(x) = Ix + U,$$

где $I: W \rightarrow Y$ — линейный оператор, а $U \subset Y$ — некоторое выпуклое уравновешенное множество. Положим в этом случае

$$E(x', W, I, U) = E(x', F).$$

Из теоремы 2.4 вытекает, что

$$(2.22) \quad E(x', W, I, U) = \sup_{x \in F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|.$$

Элемент $\hat{x} \in W$, для которого $I\hat{x} \in U$ и

$$\langle x', \hat{x} \rangle = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|,$$

будем называть *экстремальным*.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $x' \in X'$, а W и U — выпуклые уравновешенные множества. Тогда $\hat{x} \in W$ — экстремальный элемент, а $\lambda \in Y'$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если

- (i) $\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x} \rangle - \langle \lambda, I\hat{x} \rangle$,
- (ii) $\sup_{y \in U} |\langle \lambda, y \rangle| = \langle \lambda, I\hat{x} \rangle$,
- (iii) $I\hat{x} \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x}$ — экстремальный элемент и $\lambda \in Y'$ — оптимальный метод восстановления. Тогда учитывая уравновешенность множеств W и U , а также равенство (2.22), будем иметь

$$\begin{aligned} (2.23) \quad \langle x', \hat{x} \rangle &\leq |\langle x', \hat{x} \rangle - \langle \lambda, I\hat{x} \rangle| + |\langle \lambda, I\hat{x} \rangle| \leq \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| + \sup_{y \in U} |\langle \lambda, y \rangle| \\ &= \sup_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix + y \rangle| = E(x', W, I, U) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|. \end{aligned}$$

В силу того, что $\hat{x}$ — экстремальный элемент, всюду в (2.23) равенства. Следовательно, имеют место условия (i) и (ii). Условие (iii) вытекает из определения экстремальности $\hat{x}$.

Предположим, что выполнены условия (i)–(iii). Тогда

$$\begin{aligned} (2.24) \quad \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle| &\leq \sup_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix + y \rangle| \\ &\leq \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| + \sup_{y \in U} |\langle \lambda, y \rangle| = \langle x', \hat{x} \rangle - \langle \lambda, I\hat{x} \rangle + \langle \lambda, I\hat{x} \rangle = \langle x', \hat{x} \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\hat{x}$ — экстремальный элемент. Следовательно, в (2.24) всюду равенства, а это означает, что

$$\sup_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix + y \rangle| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle| = E(x', W, I, U),$$

т. е. λ — оптимальный метод восстановления. $\square$

Наиболее распространенный случай в задачах оптимального восстановления по неточным данным, когда Y — линейное нормированное пространство, а

$$U = U_\delta = \{y \in Y : \|y\|_Y \leq \delta\}, \quad \delta \geq 0.$$

Положим в этом случае

$$(2.25) \quad E(x', W, I, \delta) = E(x', W, I, U_\delta).$$

Обозначим через Y^* множество всех линейных непрерывных функционалов на Y . Тогда из теоремы 2.6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть W — выпуклое уравновешенное множество и $U = U_\delta$. Тогда $\hat{x} \in W$ — экстремальный элемент, а $\lambda \in Y^*$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если

- (i) $\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x} \rangle - \langle \lambda, I\hat{x} \rangle$,
- (ii) $\langle \lambda, I\hat{x} \rangle = \delta \|\lambda\|_{Y^*}$,
- (iii) $\|I\hat{x}\|_Y \leq \delta$.

Пусть S — некоторое непустое множество, Σ — σ -алгебра подмножеств множества S и μ — неотрицательная σ -аддитивная мера на Σ . Через $L_p(S, \Sigma, \mu)$ (или, короче, $L_p(S)$) обозначается совокупность всех σ -измеримых функций $g(\cdot)$ со значениями в $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|g(\cdot)\|_{L_p(S)} = \left(\int_S |g(s)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|g(\cdot)\|_{L_\infty(S)} = \operatorname{vraisup}_{s \in S} |g(s)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Положим

$$(f(\cdot), g(\cdot))_S = \int_S f(s) \overline{g(s)} d\mu$$

и для $a \in K$, $1 \leq p < \infty$

$$a_{(p)} = \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Пусть задан некоторый линейный оператор $T: X \rightarrow L_p(S)$. Положим

$$W_p^T = \{x \in X : \|Tx(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq 1\}$$

и рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $\langle x', x \rangle$ на множестве W_p^T по значениям линейного оператора $I: X \rightarrow Y$, заданного с погрешностью δ , т.е. по значениям многозначного отображения $F(x) = Ix + U_\delta$. Тем самым рассматривается задача о нахождении величины

$$(2.26) \quad E(x', W_p^T, I, \delta) = \inf_{\varphi: Y \rightarrow K} \sup_{\substack{x \in W_p^T, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} |\langle x', x \rangle - \varphi(y)|$$

и оптимального метода восстановления (метода, на котором достигается нижняя грань в (2.26)).

В силу соотношений двойственности, полученных в теореме 2.4, эта задача тесно связана с экстремальной задачей о нахождении величины

$$(2.27) \quad \sup_{\substack{x \in W_p^T \\ \|Ix\|_Y \leq \delta}} |\langle x', x \rangle|.$$

Во многих случаях экстремальные элементы в задаче (2.27) хорошо известны (или, во всяком случае, известен их вид). Однако нас будет интересовать не только погрешность оптимального восстановления, но и сам оптимальный метод. Многие методы удается строить с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $\hat{x} \in W_p^T$, $T\hat{x}(\cdot) \neq 0$ и для $\hat{x}_0 = \hat{x}/\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}$ выполнены условия $\|I\hat{x}_0\|_Y \leq \delta$, $\langle \lambda, I\hat{x}_0 \rangle = \delta\|\lambda\|_{Y^*}$, где $\lambda \in Y^*$ — некоторый линейный непрерывный функционал. Предположим также, что при всех $x \in X$ имеет место равенство

$$(2.28) \quad \langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle = \begin{cases} \alpha(Tx(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ (Tx(\cdot), \varphi(\cdot)T\hat{x}(\cdot))_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha \geq 0$, $\varphi(\cdot) \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|T\hat{x}(s)| = 1$ почти всюду. Тогда λ — оптимальный метод восстановления, $\hat{x}_0$ — экстремальный элемент и

$$E(x', W_p^T, I, \delta) = \begin{cases} \alpha\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1} + \delta\|\lambda\|_{Y^*}, & 1 \leq p < \infty, \\ \|\varphi(\cdot)\|_{L_1(S)} + \delta\|\lambda\|_{Y^*}, & p = \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда из (2.28) и неравенства Гельдера имеем

$$\sup_{x \in W_p^T} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \alpha \sup_{x \in W_p^T} |(Tx(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S| \leq \alpha \|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}.$$

С другой стороны, поскольку $\hat{x}_0 \in W_p^T$, то

$$\sup_{x \in W_p^T} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| \geq \alpha |(T\hat{x}_0(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S| = \alpha \|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}.$$

Учитывая (2.28), получаем

$$\langle x', \hat{x}_0 \rangle = \langle \lambda, I\hat{x}_0 \rangle + \alpha (T\hat{x}_0(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S = \delta \|\lambda\|_{Y^*} + \alpha \|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}.$$

Следовательно,

$$(2.29) \quad \sup_{x \in W_p^T} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x}_0 \rangle - \langle \lambda, I\hat{x}_0 \rangle.$$

Аналогично доказывается равенство (2.29) для $p = \infty$. Из следствия 2.7 вытекает теперь, что λ — оптимальный метод, а $\hat{x}_0$ — экстремальный элемент. $\square$

При $\delta = 0$ удобнее (чтобы не следить за положительностью множителя α) пользоваться следующей теоремой

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть $\hat{x} \in W_p^T$, $T\hat{x}(\cdot) \neq 0$, $I\hat{x} = 0$, $\lambda \in Y^*$ и при всех $x \in X$ имеет место равенство

$$(2.30) \quad \langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle = \begin{cases} \alpha (Tx(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ \alpha (Tx(\cdot), \varphi(\cdot)T\hat{x}(\cdot))_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi(\cdot) \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|T\hat{x}(s)| = 1$ почти всюду. Тогда λ — оптимальный метод восстановления, $\hat{x}_0 = \hat{x} / \|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}$ — экстремальный элемент и

$$E(x', W_p^T, I, \delta) = \begin{cases} |\alpha| \|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}, & 1 \leq p < \infty, \\ |\alpha| \|\varphi(\cdot)\|_{L_1(S)}, & p = \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = 0$, то утверждение теоремы сразу же вытекает из теоремы 2.8. Пусть $\alpha \neq 0$. Положим

$$\tilde{x} = e^{-i \arg \alpha} \hat{x}.$$

Тогда равенство (2.30) можно записать в виде

$$\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle = \begin{cases} |\alpha| (Tx(\cdot), T\tilde{x}(\cdot)_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ (Tx(\cdot), \hat{\varphi}(\cdot)T\tilde{x}(\cdot))_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\hat{\varphi}(\cdot) = |\alpha| \varphi(\cdot)$. Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 2.8. $\square$

2.3. Оптимальное восстановление и задача Стечкина

Пусть X — линейное пространство, $x' \in X'$, $W \subset X$, Y — линейное нормированное пространство и $I: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Задачей Стечкина называется задача о наилучшем приближении линейного функционала x' на классе W по значениям Ix с помощью линейных функционалов, норма которых ограничена некоторым фиксированным положительным числом N . Более точно, задача состоит в нахождении величины

$$E_N(x', W, I) = \inf_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|_{Y^*} \leq N}} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, Ix \rangle|,$$

где Y^* — сопряженное пространство к Y , а также в нахождении функционала, на котором достигается нижняя грань, называемым *оптимальным*. Эта задача оказывается тесно связанной с задачей оптимального восстановления.

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть W — выпуклое уравновешенное множество, а $\hat{x} \in W$ и $y^* \in Y^*$ таковы, что при некотором $\delta \geq 0$ выполняются условия

- (i) $\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x} \rangle - \langle y^*, I\hat{x} \rangle,$
- (ii) $\langle y^*, I\hat{x} \rangle = \delta \|y^*\|_{Y^*},$
- (iii) $\|I\hat{x}\|_Y \leq \delta.$

Тогда при $N = \|y^*\|_{Y^*}$

$$(2.31) \quad E_N(x', W, I) = \langle x', \hat{x} \rangle - \delta N,$$

а функционал y^* является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для величины $E(x', W, I, \delta)$ (см. (2.25)) имеем

$$\begin{aligned} E(x', W, I, \delta) &\leq \inf_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|_{Y^*} \leq N}} \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, y \rangle| \\ &\leq \inf_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|_{Y^*} \leq N}} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, Ix \rangle| + \delta N = E_N(x', W, I) + \delta N. \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_N(x', W, I) \geq E(x', W, I, \delta) - \delta N.$$

Из следствия 2.7 вытекает, что

$$E(x', W, I, \delta) = \langle x', \hat{x} \rangle.$$

Поэтому

$$(2.32) \quad E_N(x', W, I) \geq \langle x', \hat{x} \rangle - \delta N.$$

С другой стороны, из (i) и (ii) получаем

$$E_N(x', W, I) \leq \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x} \rangle - \delta N.$$

Учитывая (2.32), получаем равенство (2.31) и оптимальность y^* . $\square$

Пример 2.2. Рассмотрим задачу Стечкина для класса $W = W_2^1(\mathbb{R})$ (см. п. 1.6), функционала $\langle x', x(\cdot) \rangle = x(0)$ и информационного оператора $I: \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, определенного равенством $Ix(\cdot) = x(\cdot)$, т. е. $Y = L_2(\mathbb{R})$. Тем самым

$$E_N(x', W_2^1(\mathbb{R}), I) = \inf_{\substack{y^*(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|y^*(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq N}} \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, x(\cdot) \rangle|.$$

В п. 1.6 для соответствующей задачи оптимального восстановления было доказано, что $\hat{x}(\cdot) = \sqrt{\delta} e^{-|t|/\delta}$ — экстремальная функция, а

$$\langle y^*(\cdot), y(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} y(t) dt$$

— оптимальный метод. Из следствия 2.7 вытекает, что тогда выполнены условия (i)–(iii) теоремы 2.10. Следовательно, для $N = \|y^*(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$

$$E_N(x', W_2^1(\mathbb{R}), I) = \sqrt{\delta} - N\delta,$$

а функционал $y^*(\cdot)$ — оптимальный. Легко убедиться, что

$$\|y^*(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\sqrt{\delta}}.$$

Положив $\delta = (2N)^{-2}$, получим

$$E_N(x', W_2^1(\mathbb{R}), I) = \frac{1}{4N}.$$

При этом функционал

$$y^*(t) = 2N^2 e^{-4N^2|t|}$$

— оптимальный.

2.4. Построение оптимального метода с помощью параметризации экстремального элемента

Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X . Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $x' \in X'$ на множестве W по точным значениям информационного оператора

$$Ix = (\langle x'_1, x \rangle, \dots, \langle x'_n, x \rangle),$$

где x'_j , $j = 1, \dots, n$, — некоторые фиксированные линейные функционалы на X . Тогда в соответствии с общей постановкой задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(x', W, I) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - m(Ix)|$$

и соответствующего оптимального метода (т.е. метода, на котором достигается нижняя грань).

Из теоремы 2.4 следует, что

$$(2.33) \quad E(x', W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ \langle x'_j, x \rangle = 0, \quad j=1, \dots, n}} |\langle x', x \rangle|.$$

Задача (2.33) часто оказывается проще, чем задача нахождения оптимального метода восстановления. При наличии некоторой параметризации экстремального элемента в (2.33) существует способ построения оптимального метода восстановления, основанный на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X и $\hat{x}$ — экстремальный элемент в задаче (2.33). Предположим, что при всех $M = (t_1, \dots, t_{s+n}) \in \mathbb{R}^{n+s}$ из некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^{n+s}$ существуют $x(M) \in X$ такие, что $x(M_0) = \hat{x}$ и для заданных функций $\psi_1(M), \dots, \psi_s(M)$ таких, что $\psi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, s$, при всех M из окрестности M_0 , удовлетворяющих условию $\psi_j(M) = 0$, $j = 1, \dots, s$, $x(M) \in W$ (в случае $s = 0$ будем считать, что при всех M из окрестности M_0 $x(M) \in W$). Пусть, кроме того, функции $\varphi(M) = \langle x', x(M) \rangle$, $\varphi_j(M) = \langle x'_j, x(M) \rangle$, $j = 1, \dots, n$, и $\psi_j(M)$, $j = 1, \dots, s$, имеют в окрестности M_0 непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы

$$J(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n+s}} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n+s}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_{n+s}} & \dots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_{n+s}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0 , а $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n+s})^T$ — решение системы

$$J(M_0)\mathbf{C} = \left(\text{grad } \varphi|_{M_0} \right)^T.$$

Тогда единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$(2.34) \quad \langle x', x \rangle \approx \sum_{j=1}^n C_j \langle x'_j, x \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\langle x', x \rangle \approx \sum_{j=1}^n C_j \langle x'_j, x \rangle,$$

— оптимальный метод восстановления (существование его вытекает из теоремы 2.4). Тогда в силу того, что $\hat{x}$ — экстремальный элемент, имеем при всех $x \in W$

$$\left| \langle x', x \rangle - \sum_{j=1}^n C_j \langle x'_j, x \rangle \right| \leq \langle x', \hat{x} \rangle.$$

Следовательно, при всех M из некоторой окрестности M_0 таких, что $\psi_j(M) = 0$, $j = 1, \dots, s$, выполнено неравенство

$$\left| \varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M) \right| \leq \varphi(M_0).$$

Поскольку $\varphi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, то отсюда вытекает, что функция

$$\varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M)$$

имеет относительный экстремум в точке M_0 . Метод Лагранжа приводит к необходимым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^s C_{n+j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_m} = 0, \quad m = 1, \dots, n+s,$$

из которых однозначно определяются $C_1, \dots, C_n$. $\square$

Иногда удобно пользоваться несколько иным видом записи оптимального метода (2.34).

ТЕОРЕМА 2.12. В условиях теоремы 2.11 единственным оптимальным методом восстановления является метод

$$\langle x', x \rangle \approx \sum_{k=1}^{n+s} y_k \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \Big|_{M_0},$$

где $y_1, \dots, y_{n+s}$ является решением системы

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+s} y_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{M_0} &= \langle x'_j, x \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^{n+s} y_k \frac{\partial \psi_j}{\partial t_k} \Big|_{M_0} &= 0, \quad j = n+1, \dots, n+s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.11 вытекает, что единственным оптимальным методом является метод

$$\langle x', x \rangle \approx \left(J^{-1}(M_0) \left(\text{grad } \varphi|_{M_0} \right)^T, z \right) = \left(\left(\text{grad } \varphi|_{M_0} \right)^T, (J^*(M_0))^{-1} z \right),$$

где $z = (\langle x'_1, x \rangle, \dots, \langle x'_n, x \rangle, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+s}$, а $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+s}$. Положив $y = (J^*(M_0))^{-1}z$, получаем для координат вектора y систему 2.35. $\square$

Приведем один простейший пример.

Пример 2.3. Пусть $\mathcal{H}_\infty^\mathbb{R}$ пространство функций, аналитических в единичном круге

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

ограниченных в нем и вещественных на интервале $(-1, 1)$. В качестве множества W рассмотрим $H_\infty^\mathbb{R}$ — множество функций из $\mathcal{H}_\infty^\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leq 1.$$

Для задачи оптимального восстановления функций из $H_\infty^\mathbb{R}$ в точке $\tau \in (-1, 1)$ по их значениям в нуле двойственная экстремальная задача (2.33) решается сразу же с помощью леммы Шварца:

$$\sup_{\substack{f \in H_\infty^\mathbb{R} \\ f(0)=0}} |f(\tau)| = |\tau|.$$

Тем самым функция $f_0(z) = z$ является экстремальной для рассматриваемой задачи. Положим

$$f_1(z, t) = \frac{z + t}{1 + tz}.$$

Легко убедиться, что $f_1(z, t) \in H_\infty^\mathbb{R}$ при всех $t \in (-1, 1)$. Кроме того, $f_1(z, 0) = f_0(z)$ и $f_1(0, t) = t$.

Таким образом, здесь $M = t \in \mathbb{R}$, $M_0 = 0$, $x(t) = f_1(\cdot, t)$, $\varphi(t) = f_1(\tau, t)$, $\varphi_1(t) = f_1(0, t) = t$. Из теоремы 2.11 получаем, что единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод $f(\tau) \approx y_1 \varphi'(0)$, где $y_1 \varphi'_1(0) = f(0)$. Следовательно, единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$f(\tau) \approx \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(0, 0) \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial t}(\tau, 0) f(0) = (1 - \tau^2) f(0).$$

2.5. Оптимальное восстановление операторов

Будем рассматривать задачу оптимального восстановления линейного оператора на некотором множестве W из линейного пространства X по неточно заданным значениям других линейных операторов. При этом мы рассматриваем случай, когда само множество W (априорная информация об элементах из X) задается в виде ограничений, связанных с некоторым набором других линейных операторов.

Пусть $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ — линейные нормированные пространства, а $I_j : X \rightarrow Y_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, — линейные операторы. Задача состоит в оптимальном восстановлении оператора I_0 на множестве

$$W = \{x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \delta_j \geq 0, j = 1, \dots, k, \}$$

где $0 \leq k < n$, по значениям операторов $I_{k+1}, \dots, I_n$, заданным с погрешностью (при $k = 0$ полагаем $W = X$). Точнее говоря, будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \dots \times Y_n$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $\delta_j \geq 0$, $j = k+1, \dots, n$.

В соответствии с общей задачей восстановления методами восстановления называются произвольные отображения $\varphi: Y_{k+1} \times \dots \times Y_n \rightarrow Y_0$. Погрешностью метода $\varphi(\cdot)$ называется величина

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, y \in Y_{k+1} \times \dots \times Y_n \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=k+1, \dots, n}} \|I_0 x - \varphi(y)\|_{Y_0},$$

а погрешностью оптимального восстановления — величина

$$(2.36) \quad E(I, \delta) = \inf_{\varphi: Y_{k+1} \times \dots \times Y_n \rightarrow Y_0} e(I, \delta, \varphi)$$

(здесь $I = (I_0, I_1, \dots, I_n)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$). Методы, на которых достигается нижняя грань в (2.36) (если таковые существуют), называются оптимальными.

В отличие от восстановления линейных функционалов, где при условии выпуклости и уравновешенности среди оптимальных методов всегда найдется линейный (см. теорему 2.4), в задаче (2.36) может не существовать линейного оптимального метода (даже при восстановлении по точным значениям и для случая, когда все пространства $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ являются гильбертовыми). Приведем соответствующий пример (схожий с примером 2.1).

Пример 2.4. Положим $X = \mathbb{R}^3$, $Y_0 = l_2^2$ (l_2^n — пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой), $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = l_1^2$. Для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ положим

$$I_0 x = (x_1, x_2), \quad I_1 x = x_1 + 2x_2, \quad I_2 x = x_1 - 2x_2, \quad I_3 x = x_3, \quad I_4 x = x_1 + x_3.$$

Пусть $k = 3$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\delta_3 = 2/15$, $\delta_4 = 0$. Таким образом, рассматривается задача об оптимальном восстановлении оператора I_0 на классе

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : |I_1 x| \leq 1, |I_2 x| \leq 1, |I_3 x| \leq 2/15\}$$

по точным значениям функционала I_4 . Нетрудно убедиться, что множество W является параллелепипедом

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + 2|x_2| \leq 1, |x_3| \leq 2/15\}.$$

Рассмотрим метод

$$\varphi_0(y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq 4/15, \\ (y, 0), & |y| > 4/15. \end{cases}$$

Тогда, если $|x_1 + x_3| \leq 4/15$, то

$$\sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in W \\ |x_1 + x_3| \leq 4/15}} \|(x_1, x_2) - \varphi_0(x_1 + x_3)\|_{l_2} = \sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in W \\ |x_1 + x_3| \leq 4/15}} \|(x_1, x_2)\|_{l_2}.$$

В силу того, что

$$|x_1| = |x_1 + x_3 - x_3| \leq |x_1 + x_3| + |x_3| \leq \frac{2}{5},$$

имеем

$$\sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in W \\ |x_1 + x_3| \leq 4/15}} \|(x_1, x_2) - \varphi_0(x_1 + x_3)\|_{l_2} \leq \sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in W \\ |x_1| \leq 2/5}} \|(x_1, x_2)\|_{l_2} = \frac{1}{2}.$$

Если $(x_1, x_2, x_3) \in W$ и $|x_1 + x_3| > 4/15$, то $|x_1| \geq |x_1 + x_3| - |x_3| > 2/15$. Следовательно, $|x_2| < 13/30$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in W \\ |x_1 + x_3| > 4/15}} \|(x_1, x_2) - \varphi_0(x_1 + x_3)\|_{l_2} &\leq \sup_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in W \\ |x_2| < 13/30}} \|(-x_3, x_2)\|_{l_2} \\ &< \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{169}{900}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$E(I, \delta) \leq e(I, \delta, \varphi_0) \leq \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, для любого линейного метода $\varphi(y) = (c_1 y, c_2 y)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, имеем

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in W} \sqrt{(x_1 - c_1(x_1 + x_3))^2 + (x_2 - c_2(x_1 + x_3))^2}.$$

При $c_1 \leq 0$, рассматривая точку $(1, 0, 0) \in W$, будем иметь

$$e(I, \delta, \varphi) \geq \sqrt{(1 - c_1)^2 + c_2^2} \geq 1.$$

При $c_1 > 0$, рассматривая точку $(0, 1/2, 2/15 \operatorname{sign} c_2) \in W$, получим

$$e(I, \delta, \varphi) \geq \sqrt{c_1^2 \frac{4}{15} + \left(\frac{1}{2} + |c_2| \frac{2}{15}\right)^2} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого линейного метода $\varphi(\cdot)$

$$e(I, \delta, \varphi) > \frac{1}{2} \geq E(I, \delta).$$

Вернемся к общей задаче (2.36). Из леммы 2.1 следует, что

$$(2.37) \quad E(I, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=k+1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}.$$

Экстремальную задачу в правой части (2.37) будем называть *двойственной* или *ассоциированной*. Рассмотрим следующую экстремальную задачу (значение которой совпадает с квадратом величины, стоящей в правой части (2.37)):

$$(2.38) \quad \|I_0 x\|_{Y_0}^2 \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in X.$$

Следующая теорема дает один из возможных способов построения оптимального метода восстановления.

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть Y_j , $j = 1, \dots, n$, — евклидовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$. Предположим, что существуют такие $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, что значения задачи

$$(2.39) \quad \|I_0 x\|_{Y_0}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad x \in X,$$

и задачи (2.38) совпадают. Предположим, кроме того, что для всех $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \dots \times Y_n$ существует решение x_y задачи

$$(2.40) \quad \sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Тогда

$$E(I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}$$

и метод

$$(2.41) \quad \hat{\varphi}(y) = I_0 x_y$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторное пространство $E = Y_1 \times \dots \times Y_n$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j},$$

где $y^1 = (y_1^1, \dots, y_n^1)$, $y^2 = (y_1^2, \dots, y_n^2)$. Тогда экстремальная задача (2.40) может быть переписана в виде

$$\|\tilde{I}x - \tilde{y}\|_E^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

где $\tilde{I}x = (I_1x, \dots, I_nx)$, а $\tilde{y} = (0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n)$. Из теоремы 7.7 следует, что для всех $x \in X$

$$(\tilde{I}x_y - \tilde{y}, \tilde{I}x)_E = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}x - \tilde{y}\|_E^2 &= \|\tilde{I}x - \tilde{I}x_y + \tilde{I}x_y - \tilde{y}\|_E^2 \\ &= \|\tilde{I}x - \tilde{I}x_y\|_E^2 - 2\operatorname{Re}(\tilde{I}x - \tilde{I}x_y, \tilde{I}x_y - \tilde{y})_E + \|\tilde{I}x_y - \tilde{y}\|_E^2 \\ &= \|\tilde{I}x - \tilde{I}x_y\|_E^2 + \|\tilde{I}x_y - \tilde{y}\|_E^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in X$

$$(2.42) \quad \|\tilde{I}x - \tilde{I}x_y\|_E^2 \leq \|\tilde{I}x - \tilde{y}\|_E^2 = \sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j \|I_jx\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j \|I_jx - y_j\|_{Y_j}^2.$$

Пусть $x \in W$ и $y_{k+1}, \dots, y_n$ таковы, что $\|I_jx - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $j = k+1, \dots, n$. Положим $z = x - x_y$. Тогда из (2.42) следует, что

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_jz\|_{Y_j}^2 = \|\tilde{I}z\|_E^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Из этого неравенства и условия совпадения значений задач (2.38) и (2.39) получаем оценку для метода (2.41):

$$\begin{aligned} \|I_0x - \hat{\varphi}(y)\|_{Y_0}^2 &= \|I_0z\|_{Y_0}^2 \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_jz\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|I_0x\|_{Y_0}^2 \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_jx\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0x\|_{Y_0}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E(I, \delta) \leq e(I, \delta, \hat{\varphi}) \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_jx\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0x\|_{Y_0}.$$

Учитывая оценку (2.37), приходим к равенству.

$$E(I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_jx\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0x\|_{Y_0}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что $\hat{\varphi}(\cdot)$ — оптимальный метод. $\square$

Приведем теперь некоторые достаточные условия совпадения значений задач (2.38) и (2.39). Рассмотрим функцию Лагранжа задачи (2.38)

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|I_0x\|_{Y_0}^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \|I_jx\|_{Y_j}^2,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

ТЕОРЕМА 2.14. Пусть существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и допустимый в задаче (2.38) элемент $\hat{x}$ такие, что

$$(a) \quad \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j \hat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда $\hat{x}$ — решение этой задачи и

$$(2.43) \quad \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 = \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Может оказаться, что в задаче (2.38) не существует экстремального элемента. Тогда можно воспользоваться следующим достаточным условием (предыдущая теорема очевидным образом из него вытекает)

ТЕОРЕМА 2.15. Пусть существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и последовательность $\{x_m\}$ допустимых элементов в (2.38) такие, что

$$(a) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_m, \hat{\lambda}) = \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) > -\infty,$$

$$(b) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j x_m\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда имеет место равенство (2.43).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$(2.44) \quad \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = 0.$$

Действительно, предположим, что

$$(2.45) \quad \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = a > 0.$$

Тогда существует $x_1 \in X$, для которого $\mathcal{L}(x_1, \hat{\lambda}) < 2a$. Положим $x_0 = x_1/2$. Имеем

$$\mathcal{L}(x_0, \hat{\lambda}) = \frac{1}{4} \mathcal{L}(x_1, \hat{\lambda}) < \frac{a}{2},$$

что противоречит (2.45). Если

$$(2.46) \quad \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = a < 0,$$

то существует $x_1 \in X$, для которого $\mathcal{L}(x_1, \hat{\lambda}) < a/2$. Положим $x_0 = 2x_1$. Имеем

$$\mathcal{L}(x_0, \hat{\lambda}) = 4\mathcal{L}(x_1, \hat{\lambda}) < 2a,$$

что противоречит (2.46). Следовательно, выполнено равенство (2.44).

Для любого допустимого в (2.38) элемента $x \in X$ имеем

$$(2.47) \quad -\|I_0 x\|_{Y_0}^2 \geq -\|I_0 x\|_{Y_0}^2 + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j x\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2)$$

$$= \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2 \geq -\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Тем самым для всех допустимых $x \in X$

$$\|I_0 x\|_{Y_0}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\hat{\lambda}_j \delta_j^2 - \mathcal{L}(x_m, \hat{\lambda}) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\|I_0 x_m\|_{Y_0}^2 - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \left(\|I_j x_m\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|I_0 x_m\|_{Y_0}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \ j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Для любого допустимого в (2.39) элемента $x \in X$ также справедливы соотношения (2.47). Поэтому

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

В силу очевидного неравенства

$$(2.48) \quad \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \ j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2$$

соотношения (2.43) доказаны. $\square$

Рассмотрим теперь некоторое необходимое и достаточное условие совпадения значений задач (2.38) и (2.39). В дальнейшем считаем, что $I_0 X \neq 0$ (в противном случае задача восстановления решается тривиальным образом). Пусть $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Положим

$$A = \{ (\delta_1^{-2} \|I_1 x\|_{Y_1}^2, \dots, \delta_n^{-2} \|I_n x\|_{Y_n}^2) : \|I_0 x\|_{Y_0} = 1 \}.$$

ТЕОРЕМА 2.16. *Для того, чтобы существовали $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, такие, что значения задач (2.38) и (2.39) совпадают, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$(2.49) \quad \inf_{a \in A} \|a\|_\infty = \inf_{a \in \text{co } A} \|a\|_\infty,$$

где для $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$\|a\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через V значение задачи (2.38). В силу предположения $I_0 X \neq 0$ $V \neq 0$. Если для некоторого $x_0 \in X$, допустимого в (2.38), $\|I_0 x_0\|_{Y_0} = d > 0$, то

$$a = (\delta_1^{-2} \|I_1 x_0\|_{Y_1}^2 d^{-2}, \dots, \delta_n^{-2} \|I_n x_0\|_{Y_n}^2 d^{-2}) \in A$$

и

$$(2.50) \quad \|a\|_\infty \leq d^{-2}.$$

Поэтому, если $V = +\infty$, то

$$\inf_{a \in A} \|a\|_\infty = 0.$$

Из (2.48) и того, что

$$(2.51) \quad \inf_{a \in A} \|a\|_\infty \geq \inf_{a \in \text{co } A} \|a\|_\infty,$$

вытекает, что при $V = +\infty$ для любых $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, значения задач (2.38), (2.39) совпадают, а также имеет место равенство (2.49).

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $0 < V < +\infty$. Из (2.50) следует, что

$$(2.52) \quad \inf_{a \in A} \|a\|_\infty \leq \frac{1}{V}.$$

Если $a \in A$ и $a > 0$, то существует $x_0 \in X$ такой, что

$$a = (\delta_1^{-2} \|I_1 x_0\|_{Y_1}^2, \dots, \delta_n^{-2} \|I_n x_0\|_{Y_n}^2)$$

и $\|I_0 x_0\|_{Y_0} = 1$. Тогда для $x_1 = x_0 / \sqrt{\|a\|_\infty}$ имеем

$$\|I_j x_1\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad \|I_0 x_1\|_{Y_0}^2 = \frac{1}{\|a\|_\infty}.$$

Следовательно,

$$\inf_{a \in A} \|a\|_\infty \geq \frac{1}{V}.$$

Учитывая (2.52), получаем равенство

$$(2.53) \quad \inf_{a \in A} \|a\|_\infty = \frac{1}{V}.$$

1. Необходимость. Предположим, что существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, такие, что значения задач (2.38) и (2.39) совпадают. Если предположить, что $\hat{\lambda}_1 = \dots = \hat{\lambda}_n = 0$, то

$$V = \sup_{x \in X} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 = \infty.$$

Этот случай уже рассмотрен. Предположим, что $\hat{\lambda}_1^2 + \dots + \hat{\lambda}_n^2 \neq 0$. Положим

$$\mu_j = \frac{\hat{\lambda}_j \delta_j^2}{\sum_{s=1}^n \hat{\lambda}_s \delta_s^2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$(2.54) \quad V = \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_j^{-2} \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq 1}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2.$$

Пусть $x \in X$. Положим

$$c = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_j^{-2} \|I_j x\|_{Y_j}^2$$

Предположим, что $c \neq 0$. Тогда $\|I_0 x / \sqrt{c}\|_{Y_0}^2 \leq V$. Следовательно,

$$(2.55) \quad \|I_0 x\|_{Y_0}^2 \leq V \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_j^{-2} \|I_j x\|_{Y_j}^2.$$

Если $c = 0$, то $\|I_0 x\|_{Y_0} = 0$ (иначе бы $V = \infty$), и поэтому (2.55) снова выполнено. Тем самым для всех $a \in A$

$$\langle \mu, a \rangle \geq \frac{1}{V},$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, а

$$\langle \mu, a \rangle = \sum_{j=1}^n \mu_j a_j.$$

Следовательно,

$$(2.56) \quad \inf_{a \in A} \langle \mu, a \rangle \geq \frac{1}{V}.$$

Заметим, что

$$(2.57) \quad \inf_{a \in A} \langle \mu, a \rangle = \inf_{a \in \text{co } A} \langle \mu, a \rangle.$$

Действительно, если $a \in \text{co } A$, то

$$a = \sum_{s=1}^m \lambda_s a_s, \quad a_s \in A, \quad \lambda_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad \sum_{s=1}^m \lambda_s = 1.$$

Тогда

$$\langle \mu, a \rangle = \sum_{s=1}^m \lambda_s \langle \mu, a_s \rangle \geq \inf_{a \in A} \langle \mu, a \rangle.$$

Переходя слева к нижней грани по всем $a \in \text{co } A$, получаем, что левая часть в (2.57) не превосходит правой. Обратное неравенство очевидно.

Учитывая (2.51), (2.57), (2.56), неравенство $\langle \mu, a \rangle \leq \|a\|_\infty$ и (2.53), получаем

$$(2.58) \quad \inf_{a \in A} \|a\|_\infty \geq \inf_{a \in \text{co } A} \|a\|_\infty \geq \inf_{a \in \text{co } A} \langle \mu, a \rangle = \inf_{a \in A} \langle \mu, a \rangle \geq \frac{1}{V} = \inf_{a \in A} \|a\|_\infty.$$

Отсюда следует (2.49).

2. Достаточность. Пусть выполнено равенство (2.49). Обозначим эти значения через v . Поскольку рассматривается случай, когда $0 < V < +\infty$, из (2.53) вытекает, что $v > 0$. Из (2.49) следует, что внутренность шара $B(0, v) = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\|_\infty \leq v\}$ и $\text{co } A$ не пересекаются. По теореме отделимости найдется такой элемент $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2 \neq 0$, что

$$(2.59) \quad \sum_{j=1}^n \mu_j b_j \leq \sum_{j=1}^n \mu_j a_j$$

для всех $b = (b_1, \dots, b_n) \in B(0, v)$ и всех $a \in \text{co } A$, а, следовательно, и для всех $a \in A$.

Покажем, что если при некотором $1 \leq s \leq n$ $\mu_s < 0$, то его можно положить равным нулю. Действительно, имеем

$$\sum_{j \neq s}^n \mu_j b_j \leq \sum_{j \neq s}^n \mu_j a_j + |\mu_s| b_s - |\mu_s| a_s \leq \sum_{j \neq s}^n \mu_j a_j + |\mu_s| b_s.$$

Так как эти неравенства выполнены для всех $b = (b_1, \dots, b_n) \in B(0, v)$ и всех $a \in A$, то, в частности, и для $b_s = 0$. Тем самым для всех $b = (b_1, \dots, b_n) \in B(0, v)$ и всех $a \in A$ имеет место неравенство

$$\sum_{j \neq s}^n \mu_j b_j \leq \sum_{j \neq s}^n \mu_j a_j.$$

Ясно, что случай, когда все $\mu_j \leq 0$ невозможен, иначе, продолжая этот процесс исключения, мы пришли бы к неравенству $\mu_s b_s \leq \mu_s a_s$, где $\mu_s < 0$, которое очевидно не имеет места (например, при $b_s = -v$).

Итак, доказано, что для всех $b = (b_1, \dots, b_n) \in B(0, v)$ и всех $a \in A$ справедливо неравенство (2.59), в котором $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ и не все они равны нулю. Положим

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\mu_j}{\sum_{s=1}^n \mu_s}.$$

Тогда, из неравенства (2.59) получаем

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j b_j \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j a_j.$$

Подставляя в него точку $b = (v, \dots, v)$, получаем

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j a_j \geq v.$$

Пусть $x \in X$,

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^{-2} \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq 1$$

и $\|I_0 x\|_{Y_0} = d > 0$. Для $\hat{x} = x/d$ имеем $\|I_0 \hat{x}\|_{Y_0} = 1$ и

$$\frac{1}{d^2} \geq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^{-2} \|I_j \hat{x}\|_{Y_j}^2 \geq v.$$

Следовательно, учитывая (2.53)

$$(2.60) \quad \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j} \leq 1}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2 \leq \frac{1}{v} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^2.$$

Из (2.48) вытекает совпадение значений задач (2.38) и (2.39). $\square$

ЛЕММА 2.17. Пусть $n = 2$, а Y_j , $j = 0, 1, 2$, — евклидовы пространства. Тогда имеет место равенство (2.49).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a(x) = (\delta_1^{-2} \|I_1 x\|_{Y_1}^2, \delta_2^{-2} \|I_2 x\|_{Y_2}^2), \quad x \in X, \quad v = \inf_{a \in A} \|a\|_\infty.$$

Предположим, что лемма не имеет места. Тогда в силу (2.51) должно выполняться неравенство

$$\inf_{a \in \text{co } A} \|a\|_\infty < v.$$

Тем самым найдутся две различные точки $a(x_1)$ и $a(x_2)$ такие, что $\|I_0 x_1\|_{Y_0} = \|I_0 x_2\|_{Y_0} = 1$, а для некоторой точки u , лежащей внутри отрезка, соединяющего точки $a(x_1)$ и $a(x_2)$, $\|u\|_\infty < v$. Мы построим непрерывную кривую, лежащую в A , соединяющую точки $a(x_1)$ и $a(x_2)$, которая пересекает отрезок, соединяющий начало координат и u . Тогда для этой точки пересечения $u' \in A$ будем иметь

$$\|u'\|_\infty \leq \|u\|_\infty < v = \inf_{a \in A} \|a\|_\infty,$$

что приводит к противоречию.

Положим для $t \in \mathbb{R}$ $x(t) = tx_1 + (1-t)x_2$. Тогда в силу того, что $|(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0}| \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \|I_0 x(t)\|_{Y_0}^2 &= t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \text{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0} \\ &= 1 + 2t(t-1)(1 - \text{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0}) \geq 1 - \frac{1}{2}(1 - \text{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \text{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0}). \end{aligned}$$

Будем считать, что $\text{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0} \geq 0$. В противном случае в силу того, что $a(-x_1) = a(x_1)$, можно вместо x_1 рассматривать $-x_1$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ $\|I_0 x(t)\|_{Y_0} > 0$.

Положим

$$u(t) = a \left(\frac{x(t)}{\|I_0 x(t)\|_{Y_0}} \right).$$

Множество точек $\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ образует непрерывную кривую C , лежащую в A . Предположим, что $\|I_0 x_1 - I_0 x_2\|_{Y_0} > 0$. Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} a \left(\frac{x_1 - x_2 + x_2/t}{\|I_0 x_1 - I_0 x_2 + I_0 x_2/t\|_{Y_0}} \right) = a \left(\frac{x_1 - x_2}{\|I_0 x_1 - I_0 x_2\|_{Y_0}} \right) \in A,$$

то, добавив эту точку, получим замкнутую непрерывную кривую $\bar{C}$, лежащую в A . Пусть

$$L = \{a \in \mathbb{R}^2 : (w, a) = c\}$$

— прямая, соединяющая точки $a(x_1)$ и $a(x_2)$ (здесь $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$). Рассмотрим полином второй степени

$$P_2(t) = \|I_0 x(t)\|_{Y_0}^2 ((w, u(t)) - c).$$

Этот полином имеет нули в точках $t = 0, 1$. Тем самым прямая L разбивает $\bar{C}$ на две части, лежащие в разных полуплоскостях. Одна из этих частей пересекает отрезок, соединяющий точки 0 и u .

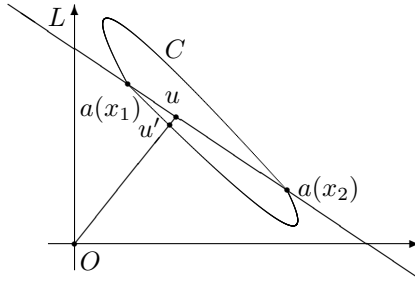


Рис. 2.5.1

Предположим теперь, что $\|I_0 x_1 - I_0 x_2\|_{Y_0} = 0$. Тогда

$$0 = \|I_0 x_1 - I_0 x_2\|_{Y_0}^2 = 2 - 2 \operatorname{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re}(I_0 x_1, I_0 x_2)_{Y_0} = 1$. Тем самым при всех $t \in \mathbb{R}$ $\|I_0 x(t)\|_{Y_0} = 1$. Имеем

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{u(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} a(x_1 - x_2 + x_2/t) = a(x_1 - x_2).$$

Из того, что точки $a(x_1)$ и $a(x_2)$ различные, а

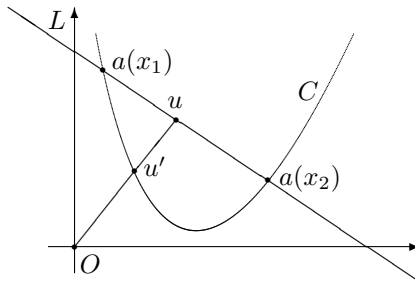


Рис. 2.5.2

$$|\|I_j x_1\|_{Y_j} - \|I_j x_2\|_{Y_j}| \leq \|I_j x_1 - I_j x_2\|_{Y_j}, \quad j = 1, 2,$$

вытекает, что $a(x_1 - x_2) \neq 0$. Таким образом, кривая C разбивается прямой на три части. В одной полуплоскости лежит ограниченная часть этой кривой, а в другой — две неограниченных части. Так как $\|u\|_\infty < \min\{\|a(x_1)\|_\infty, \|a(x_2)\|_\infty\}$, то прямая L пересекает лучи $\{(t, 0) : t > 0\}$ и $\{(0, t) : t > 0\}$. Поэтому отрезок, соединяющий 0 и u лежит в той же полуплоскости, что и ограниченная часть кривой C . Следовательно, они пересекаются (см. рис. 2.5.2). $\square$

Из теорем 2.13, 2.16 и леммы 2.17 вытекает

ТЕОРЕМА 2.18. Пусть Y_j , $j = 0, 1, 2$, — евклидовы пространства, $\delta_1, \delta_2 > 0$. Тогда существует $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, для которых

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1,2}} \|I_0 x\|_{Y_0} = \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^2 \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^2 \hat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|I_0 x\|_{Y_0}.$$

Если для всех $y \in Y_2$ существует решение x_y задачи

$$(2.61) \quad \hat{\lambda}_1 \|I_1 x\|_{Y_1}^2 + \hat{\lambda}_2 \|I_2 x - y\|_{Y_2}^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

то

$$E(I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1,2}} \|I_0 x\|_{Y_0}$$

и метод

$$\hat{\varphi}(y) = I_0 x_y$$

является оптимальным в задаче (2.36) при $k = 1$.

Даже для евклидовых пространств Y_j , $j = 0, 1, \dots, n$ при $n = 3$ равенство (2.49) уже может не выполняться. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.5. Пусть $n = 3$, $X = \mathbb{R}^2$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$. Для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ положим

$$\begin{aligned} \|x\|_{Y_0}^2 &= x_1^2 + x_2^2, \quad \|x\|_{Y_1}^2 = x_1^2 + 2x_2^2, \\ \|x\|_{Y_2}^2 &= \left(\frac{x_1 - \sqrt{3}x_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}x_1 + x_2}{2}\right)^2, \\ \|x\|_{Y_3}^2 &= \left(\frac{x_1 + \sqrt{3}x_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}x_1 - x_2}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$I_0 x = I_1 x = I_2 x = I_3 x = x$. Тем самым

$$A = \{(\|x\|_{Y_1}^2, \|x\|_{Y_2}^2, \|x\|_{Y_3}^2) : \|x\|_{Y_0} = 1\}.$$

Положив $x = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$, имеем

$$A = \{(T(\theta), T(\theta + \pi/3), T(\theta + 2\pi/3)) : \theta \in \mathbb{T}\},$$

где

$$T(\theta) = \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta.$$

В силу того, что при всех $\alpha \in \mathbb{T}$

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\pi/3) + \cos(\alpha + 4\pi/3) = 0,$$

имеем

$$T(\theta) + T(\theta + \pi/3) + T(\theta + 2\pi/3) = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, множество $A \subset \mathbb{R}^3$ лежит в плоскости

$$P = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + a_2 + a_3 = 9/2\}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & (T(\theta) - 3/2)^2 + (T(\theta + \pi/3) - 3/2)^2 + (T(\theta + 2\pi/3) - 3/2)^2 \\ &= 1/4(\cos^2 2\theta + \cos^2(2\theta + 2\pi/3) + \cos^2(2\theta + 4\pi/3)) \\ &= 1/8(3 + \cos 4\theta + \cos(4\theta + 4\pi/3) + \cos(4\theta + 8\pi/3)) = 3/8. \end{aligned}$$

Следовательно, множество A является окружностью с центром в точке $(3/2, 3/2, 3/2)$ с радиусом $R = \sqrt{6}/4$, лежащей в плоскости P . Отсюда

$$\inf_{a \in \text{co } A} \|a\|_\infty = 3/2,$$

а

$$\inf_{a \in A} \|a\|_\infty = d,$$

где d — длина ребра куба с вершиной в начале координат, вписанного в найденную окружность. Несложно убедиться, что $d = 7/4$. Тем самым в рассматриваемом случае

$$\inf_{a \in \text{co } A} \|a\|_\infty < \inf_{a \in A} \|a\|_\infty.$$

Заметим, что величину d можно вычислить и с помощью равенства (2.53). Из него следует, что $d = 1/V$, где

$$V = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ \|x\|_{Y_j} \leq 1, j=1,2,3}} \|x\|_{Y_0}^2.$$

Иными словами, V равно квадрату радиуса описанного круга пересечения эллипса $x^2 + 2y^2 \leq 1$ с двумя подобными эллипсами, повернутыми на 60° и на 120° .

2.6. Построение семейства оптимальных методов

В некоторых случаях в задаче (2.36) удастся построить целое семейство оптимальных методов.

ТЕОРЕМА 2.19. Пусть $1 \leq p < +\infty$. Предположим, что существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, такие, что

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

Пусть, кроме того, множество линейных операторов $S_j: Y_j \rightarrow Y_0$, $j = 1, \dots, n$, таково, что

$$(2.62) \quad I_0 = \sum_{j=1}^n S_j I_j$$

и

$$(2.63) \quad \left\| \sum_{j=1}^n S_j z_j \right\|_{Y_0}^p \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|z_j\|_{Y_j}^p,$$

для всех $z_j \in Y_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда для любого $0 \leq k \leq n-1$ методы

$$(2.64) \quad \hat{\varphi}(y) = S_{k+1}y_{k+1} + \dots + S_n y_n, \quad y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \dots \times Y_n,$$

являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$(2.65) \quad E(I, \delta) = \left(\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^p \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из (2.37) при любом $0 \leq k \leq n-1$ вытекает оценка

$$(2.66) \quad E^p(I, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \ j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

Зафиксируем k , $0 \leq k \leq n-1$. Тогда для оценки p -ой степени погрешности метода $\hat{\varphi}(\cdot)$ надо оценить значение следующей экстремальной задачи

$$\left\| I_0 x - \sum_{j=k+1}^n S_j y_j \right\|_{Y_0}^p \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \ j=1, \dots, k, \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, \ j=k+1, \dots, n, \quad x \in X.$$

Положим $z_j = I_j x - y_j$, $j = k+1, \dots, n$. Тогда эта задача переписывается в виде

$$(2.67) \quad \left\| \left(I_0 - \sum_{j=k+1}^n S_j I_j \right) x + \sum_{j=k+1}^n S_j z_j \right\|_{Y_0}^p \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \ j=1, \dots, k, \\ \|z_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, \ j=k+1, \dots, n, \quad x \in X.$$

В силу равенства (2.62) и условия (2.63) получаем

$$\left\| \left(I_0 - \sum_{j=k+1}^n S_j I_j \right) x + \sum_{j=k+1}^n S_j z_j \right\|_{Y_0}^p = \left\| \sum_{j=1}^k S_j I_j x + \sum_{j=k+1}^n S_j z_j \right\|_{Y_0}^p \\ \leq \sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^p + \sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j \|z_j\|_{Y_j}^p \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

Таким образом,

$$E^p(I, \delta) \leq e^p(I, \delta, \hat{\varphi}) \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^p,$$

что вместе с (2.66) доказывает теорему. $\square$

Отметим, что двойственная экстремальная задача

$$\|I_0 x\|_{Y_0} \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n,$$

“не различает” какие из операторов I_j являются информационными, а какие из них задают класс, на котором рассматривается задача восстановления. Иными словами, двойственная экстремальная задача не отличает априорную информацию от апостериорной. В силу этого из теоремы 2.19 вытекает, что если найдены операторы $S_j: Y_j \rightarrow Y_0$, $j=1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям (2.62) и (2.63), то решены сразу n задач восстановления (при $k=0, 1, \dots, n-1$). Причем для получения соответствующего оптимального метода достаточно в методе

$$\hat{\varphi}(y) = S_1 y_1 + \dots + S_n y_n$$

положить $y_1 = \dots = y_k = 0$. На самом деле за счет перенумерации операторов I_j решено $2^n - 1$ задач восстановления. А для получения соответствующего оптимального метода надо положить равными нулю те y_j , которые относятся к операторам I_j , задающим класс.

Построим семейства оптимальных методов для одной дискретной задачи восстановления.

Пусть $J \subset \mathbb{Z}$, $J_0 \subset J$, l_p , $1 \leq p < \infty$, — множество векторов $x = \{x_j\}_{j \in J}$, для которых

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{j \in J} |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

а l_p^0 , $1 \leq p < \infty$, — множество векторов $x = \{x_j\}_{j \in J_0}$, для которых

$$\|x\|_{l_p^0} = \left(\sum_{j \in J_0} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Положим

$$X = \left\{ x \in l_p : \sum_{j \in J} |\nu_j x_j|^p < \infty \right\},$$

$$Y_0 = Y_1 = l_p, \quad Y_2 = l_p^0,$$

$$I_0 x = \{\mu_j x_j\}_{j \in J}, \quad I_1 x = \{\nu_j x_j\}_{j \in J}, \quad I_2 x = \{x_j\}_{j \in J_0},$$

где

$$\sup_{j \in J, \nu_j \neq 0} \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p} < +\infty$$

(из последнего условия вытекает, что $I_0 x \in l_p$ для любого $x \in X$).

Тем самым при $k = 1$ рассматривается задача о восстановлении значений оператора I_0 в метрике l_p по неточно заданному вектору $I_2 x$, $x \in W$ (вместо $I_2 x$ известен вектор $y \in l_p^0$, для которого $\|I_2 x - y\|_{l_p^0} \leq \delta_2$), где

$$W = \left\{ x \in X : \sum_{j \in J} |\nu_j x_j|^p \leq \delta_1^p \right\}.$$

При $k = 0$ рассматривается задача о восстановлении значений оператора I_0 в метрике l_p по неточно заданным векторам $I_1 x$ и $I_2 x$: вместо $I_1 x$ и $I_2 x$ известны векторы $y_1 \in l_p$ и $y_2 \in l_p^0$, для которых $\|I_1 x - y_1\|_{l_p} \leq \delta_1$ и $\|I_2 x - y_2\|_{l_p^0} \leq \delta_2$.

Будем предполагать, что $\nu_j \neq 0$ для всех $j \in J \setminus J_0$ и

$$\lambda = \sup_{j \in J \setminus J_0} \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p} < +\infty$$

(при $J_0 = J$ полагаем $\lambda = 0$). Рассмотрим на плоскости (t, x) множество

$$M = \text{co}\{(0, 0) \cup \{(|\nu_j|^p, |\mu_j|^p)\}_{j \in J_0}\} + \{(t, t\lambda) : t \geq 0\},$$

где $\text{co } \Omega$ — выпуклая оболочка множества Ω . Предположим, что на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, конечное число точек из множества $\{|\nu_j|\}_{j \in J}$. Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по правилу:

$$\theta(t) = \max\{x : (t, x) \in M\}.$$

Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная (см. рис. 2.6.3) с конечным числом изломов в каждой полосе $0 \leq t \leq T$, $T > 0$.

ТЕОРЕМА 2.20. При всех $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$E(I, \delta) = \delta_2 \theta^{1/p}(\delta_1^p / \delta_2^p).$$

Пусть $k = 0$, а δ_1^p / δ_2^p принадлежит тому промежутку на $\mathbb{R}_+$, где $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$. Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то для всех α_j , $j \in J_0$,

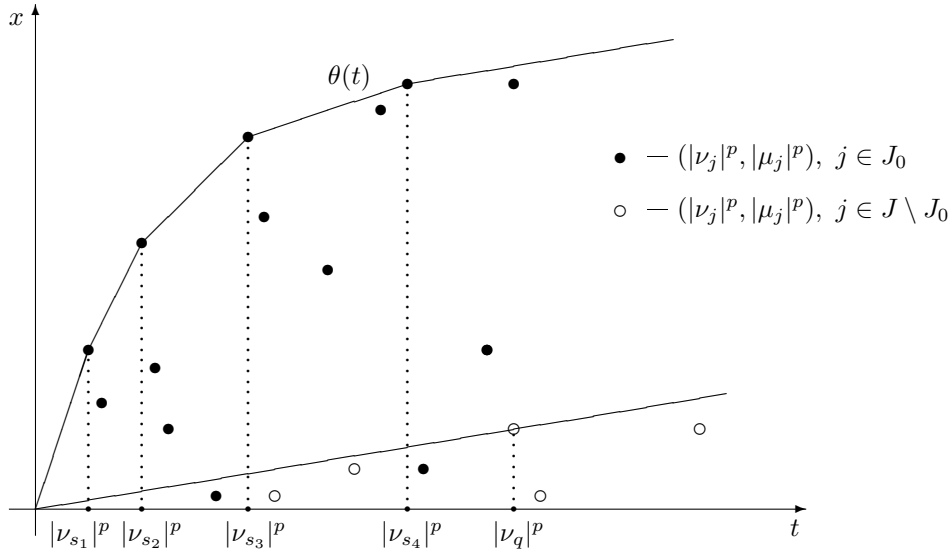


Рис. 2.6.3

удовлетворяющих условию при $\nu_j \neq 0$

$$(2.68) \quad \begin{cases} \frac{|\mu_j - \alpha_j|^{p'}}{\nu_j^{p'} \lambda_1^{p'/p}} + \frac{|\alpha_j|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p}} \leq 1, & 1 < p < +\infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \\ \frac{|\mu_j - \alpha_j|}{|\nu_j| \lambda_1} \leq 1, \quad \frac{|\alpha_j|}{\lambda_2} \leq 1, & p = 1, \end{cases}$$

методы

$$(2.69) \quad \{\hat{\varphi}(y_1, y_2)\}_j = \begin{cases} \frac{\mu_j - \alpha_j}{\nu_j} \{y_1\}_j + \alpha_j \{y_2\}_j, & j \in J_0, \quad \nu_j \neq 0, \\ \mu_j \{y_2\}_j, & j \in J_0, \quad \nu_j = 0, \\ \frac{\mu_j}{\nu_j} \{y_1\}_j, & j \in J \setminus J_0, \end{cases}$$

являются оптимальными. Если $\lambda_1 = 0$, то метод

$$\{\hat{\varphi}(y_1, y_2)\}_j = \begin{cases} \mu_j \{y_2\}_j, & j \in J_0, \\ 0, & j \in J \setminus J_0, \end{cases}$$

является оптимальным. Если $\lambda_2 = 0$, то

$$\{\hat{\varphi}(y_1, y_2)\}_j = \begin{cases} \frac{\mu_j}{\nu_j} \{y_1\}_j, & j \in J, \quad \nu_j \neq 0, \\ 0, & j \in J_0, \quad \nu_j = 0, \end{cases}$$

— оптимальный метод.

При $k = 1$ методы $\hat{\varphi}(0, y_2)$ являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу (2.38). Она записывается в виде

$$(2.70) \quad \sum_{j \in J} |\mu_j x_j|^p \rightarrow \max, \quad \sum_{j \in J} |\nu_j x_j|^p \leq \delta_1^p, \quad \sum_{j \in J_0} |x_j|^p \leq \delta_2^p.$$

Пусть $0 < |\nu_{s_1}|^p < \dots < |\nu_{s_m}|^p$ — аргументы точек излома ломаной $\theta(\cdot)$ (возможно, что $m = \infty$). Предположим, что $|\nu_{s_{l-1}}| \leq \delta_1/\delta_2 < |\nu_{s_l}|$ при некотором

$l > 1$, а функция $\theta(\cdot)$ при $|\nu_{s_{l-1}}|^p \leq t \leq |\nu_{s_l}|^p$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$. Положим $\hat{x}_j = 0, j \neq s_{l-1}, s_l$,

$$\hat{x}_{s_{l-1}} = \left(\frac{\delta_2^p |\nu_{s_l}|^p - \delta_1^p}{|\nu_{s_l}|^p - |\nu_{s_{l-1}}|^p} \right)^{1/p}, \quad \hat{x}_{s_l} = \left(\frac{\delta_1^p - \delta_2^p |\nu_{s_{l-1}}|^p}{|\nu_{s_l}|^p - |\nu_{s_{l-1}}|^p} \right)^{1/p}.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} |\nu_{s_{l-1}} \hat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\nu_{s_l} \hat{x}_{s_l}|^p &= \delta_1^p, \\ |\hat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\hat{x}_{s_l}|^p &= \delta_2^p. \end{aligned}$$

$\hat{x} = \{\hat{x}_j\}_{j \in J}$ является допустимой последовательностью в задаче (2.70). Тем самым значение этой задачи оценивается снизу величиной

$$(2.71) \quad |\mu_{s_{l-1}}|^p |\hat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\mu_{s_l}|^p |\hat{x}_{s_l}|^p = \lambda_1 \delta_1^p + \lambda_2 \delta_2^p.$$

Пусть теперь m конечно, $\delta_1/\delta_2 \geq |\nu_{s_m}|$, а $\theta(\cdot)$ на промежутке $[|\nu_{s_m}|^p, +\infty)$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$ и $\lambda_1 \neq 0$. Если на этой прямой при $t \in [|\nu_{s_m}|^p, +\infty)$ находится бесконечное число точек из множества $(|\nu_j|^p, |\mu_j|^p)$, $j \in J_0$, то среди них найдутся точки $(|\nu_{j_1}|^p, |\mu_{j_1}|^p)$, $(|\nu_{j_2}|^p, |\mu_{j_2}|^p)$ такие, что $|\nu_{j_1}| \leq \delta_1/\delta_2 < |\nu_{j_2}|$. Рассуждения аналогичные тем, которые проводились выше, для случая $|\nu_{s_{l-1}}| \leq \delta_1/\delta_2 < |\nu_{s_l}|$ приводят к той же оценке в задаче (2.70). Если на рассматриваемой прямой при $t \in [|\nu_{s_m}|^p, +\infty)$ находится конечное число точек из множества $(|\nu_j|^p, |\mu_j|^p)$, $j \in J_0$, то $\lambda_1 = \lambda \neq 0$. Из определения λ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $s_{m+1} \in J \setminus J_0$ такое, что

$$(2.72) \quad \frac{|\mu_{s_{m+1}}|^p}{|\nu_{s_{m+1}}|^p} > \lambda - \varepsilon.$$

Положим $\hat{x}_j = 0, j \neq s_m, s_{m+1}$, а $\hat{x}_{s_m}$ и $\hat{x}_{s_{m+1}}$ выберем так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\begin{aligned} |\nu_{s_m} \hat{x}_{s_m}|^p + |\nu_{s_{m+1}} \hat{x}_{s_{m+1}}|^p &= \delta_1^p, \\ |\hat{x}_{s_m}|^p &= \delta_2^p. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\hat{x}$ является допустимым элементом в задаче (2.70). Следовательно, ее значение оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned} |\mu_{s_m}|^p |\hat{x}_{s_m}|^p + |\mu_{s_{m+1}}|^p |\hat{x}_{s_{m+1}}|^p &= \lambda_1 \delta_1^p + \lambda_2 \delta_2^p - \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{m+1}}|^p}{|\nu_{s_{m+1}}|^p} \right) (\delta_1^p - \delta_2^p |\nu_{s_m}|^p) \\ &\geq \lambda_1 \delta_1^p + \lambda_2 \delta_2^p - \varepsilon (\delta_1^p - \delta_2^p |\nu_{s_m}|^p). \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что значение задачи (2.70) оценивается снизу величиной $\lambda_1 \delta_1^p + \lambda_2 \delta_2^p$.

Если $\lambda_1 = 0$, то $\theta(t) = \lambda_2 = |\mu_{s_m}|^p$. Тогда положим $\hat{x}_j = 0, j \neq s_m$, а $\hat{x}_{s_m} = \delta_2$. В силу того, что эта последовательность является допустимой, значение задачи (2.70) оценивается снизу величиной

$$|\mu_{s_m}|^p |\hat{x}_{s_m}|^p = \lambda_2 \delta_2^p.$$

Предположим теперь, что $\delta_1/\delta_2 < \nu_{s_1}$. Если существует $\nu_j = 0, j \in J_0$, и при этом $\mu_j \neq 0$, то, выбрав s_0 из условия $\theta(0) = |\mu_{s_0}|^p, \nu_{s_0} = 0$, те же рассуждения, что и выше, проведенные для $l = 1$, доказывают равенство (2.71), где λ_1 и λ_2 таковы, что функция $\theta(\cdot)$ на отрезке $[0, |\nu_{s_1}|^p]$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$. Если $\nu_j \neq 0$ при всех $j \in J_0$, то $\lambda_2 = 0$ и $\theta(t) = \lambda_1 t$ при $t \in [0, |\nu_{s_1}|^p]$. Тогда положим $\hat{x}_j = 0, j \neq s_1$, а $\hat{x}_{s_1} = \delta_1/\nu_{s_1}$. Нетрудно убедиться, что $\hat{x}$ является допустимым элементом в задаче (2.70). Следовательно, ее значение оценивается снизу величиной

$$|\mu_{s_1}|^p |\hat{x}_{s_1}|^p = \lambda_1 \delta_1^p.$$

Итак, доказано, что в экстремальной задаче (2.70) существует допустимая последовательность $\{\hat{x}_j\}_{j \in J}$, для которой

$$\sum_{j \in J} |\mu_j \hat{x}_j|^p \geq \lambda_1 \delta_1^p + \lambda_2 \delta_2^p,$$

где λ_1 и λ_2 зависят указанным образом от того, на какой из промежутков между изломами $\theta(\cdot)$ попало число δ_1^p/δ_2^p .

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Рассмотрим операторы $S_1: l_p \rightarrow l_p$ и $S_2: l_p^0 \rightarrow l_p$, определенные равенствами

$$\{S_1 z\}_j = \begin{cases} \frac{\mu_j - \alpha_j}{\nu_j} z_j, & j \in J_0, \nu_j \neq 0, \\ 0, & j \in J_0, \nu_j = 0, \\ \frac{\mu_j}{\nu_j} z_j, & j \in J \setminus J_0, \end{cases} \quad \{S_2 z\}_j = \begin{cases} \alpha_j z_j, & j \in J_0, \\ 0, & j \in J \setminus J_0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$I_0 = S_1 I_1 + S_2 I_2.$$

Оценим величину

$$\|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_p}^p,$$

где $z_1 = \{z_j^{(1)}\}_{j \in J}$, $z_2 = \{z_j^{(2)}\}_{j \in J_0}$. Для всех $z_1 \in l_p$ и $z_2 \in l_p^0$ имеем

$$(2.73) \quad \|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_p}^p = \sum_{j \in J_0, \nu_j \neq 0} \left| \frac{\mu_j - \alpha_j}{\nu_j} z_j^{(1)} + \alpha_j z_j^{(2)} \right|^p + \sum_{j \in J_0, \nu_j = 0} \left| \mu_j z_j^{(2)} \right|^p + \sum_{j \in J \setminus J_0} \left| \frac{\mu_j}{\nu_j} z_j^{(1)} \right|^p.$$

При $\nu_j \neq 0$, $1 \leq p < +\infty$, по неравенству Гельдера

$$\left| \frac{\mu_j - \alpha_j}{\nu_j} z_j^{(1)} + \alpha_j z_j^{(2)} \right| = \left| \frac{\mu_j - \alpha_j}{\lambda_1^{1/p} \nu_j} \lambda_1^{1/p} z_j^{(1)} + \frac{\alpha_j}{\lambda_2^{1/p}} \lambda_2^{1/p} z_j^{(2)} \right| \leq h_j \left(\lambda_1 |z_j^{(1)}|^p + \lambda_2 |z_j^{(2)}|^p \right)^{1/p},$$

где

$$h_j = \begin{cases} \left(\frac{|\mu_j - \alpha_j|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p} |\nu_j|^{p'}} + \frac{|\alpha_j|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p}} \right)^{1/p'}, & 1 < p < +\infty, \\ \max \left\{ \frac{|\mu_j - \alpha_j|}{|\nu_j| \lambda_1}, \frac{|\alpha_j|}{\lambda_2} \right\}, & p = 1. \end{cases}$$

Покажем, что множество $\{\alpha_j\}_{\{j \in J_0, \nu_j \neq 0\}}$, для которых выполнено условие (2.68) не пусто. Действительно, для

$$(2.74) \quad \alpha_j = \frac{\lambda_2 \mu_j}{\lambda_2 + \lambda_1 |\nu_j|^p}$$

имеем

$$h_j = \frac{|\mu_j|}{(\lambda_2 + \lambda_1 |\nu_j|^p)^{1/p}}.$$

В силу определения множества M и функции $\theta(\cdot)$, если на каком-нибудь из промежутков ломаная $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$, то $\lambda_1 \geq \lambda$, $\lambda_2 \geq 0$ и при всех $j \in J$ выполнено неравенство

$$(2.75) \quad -|\mu_j|^p + \lambda_2 \chi_j + \lambda_1 |\nu_j|^p \geq 0,$$

где

$$\chi_j = \begin{cases} 1, & j \in J_0, \\ 0, & j \in J \setminus J_0. \end{cases}$$

Следовательно, при $j \in J_0$

$$|\mu_j|^p \leq \lambda_2 + \lambda_1 |\nu_j|^p.$$

Поэтому для α_j , определенных равенствами (2.74), $h_j \leq 1$.

Если выполнено условие (2.68), то $h_j \leq 1$ и

$$(2.76) \quad \left| \frac{\mu_j - \alpha_j}{\nu_j} z_j^{(1)} + \alpha_j z_j^{(2)} \right|^p \leq \lambda_1 |z_j^{(1)}|^p + \lambda_2 |z_j^{(2)}|^p.$$

Следовательно, из (2.73) получаем

$$\begin{aligned} \|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_p}^p &\leq \sum_{j \in J_0, \nu_j \neq 0} \left(\lambda_1 |z_j^{(1)}|^p + \lambda_2 |z_j^{(2)}|^p \right) \\ &\quad + \sum_{j \in J_0, \nu_j = 0} |\mu_j z_j^{(2)}|^p + \sum_{j \in J \setminus J_0} \left| \frac{\mu_j}{\nu_j} z_j^{(1)} \right|^p. \end{aligned}$$

Если $\nu_j = 0$, $j \in J_0$, то из (2.75) вытекает, что $|\mu_j|^p \leq \lambda_2$. При $j \in J \setminus J_0$ из (2.75) вытекает, что $|\mu_j|^p / |\nu_j|^p \leq \lambda_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_p}^p &\leq \sum_{j \in J_0, \nu_j \neq 0} \left(\lambda_1 |z_j^{(1)}|^p + \lambda_2 |z_j^{(2)}|^p \right) + \lambda_2 \sum_{j \in J_0, \nu_j = 0} |z_j^{(2)}|^p \\ &\quad + \lambda_1 \sum_{j \in J \setminus J_0} |z_j^{(1)}|^p \leq \lambda_1 \|z_1\|_{l_p}^p + \lambda_2 \|z_2\|_{l_p^0}^p. \end{aligned}$$

Если $\lambda_1 = 0$, положим $S_1 = 0$,

$$\{S_2 z\}_j = \begin{cases} \mu_j z_j, & j \in J_0, \\ 0, & j \in J \setminus J_0. \end{cases}$$

Из (2.75) вытекает, что $\mu_j = 0$ при $j \in J \setminus J_0$. Поэтому $I_0 = S_2 I_2$, а

$$\|S_2 z\|^p = \sum_{j \in J_0} |\mu_j z_j|^p.$$

Из того же неравенства (2.75) следует, что $|\mu_j|^p \leq \lambda_2$ при $j \in J_0$. Тем самым

$$\|S_2 z\|^p \leq \lambda_2 \|z\|_{l_p^0}^p.$$

Наконец, если $\lambda_2 = 0$, положим $S_2 = 0$,

$$\{S_1 z\}_j = \begin{cases} \frac{\mu_j}{\nu_j} z_j, & j \in J, \nu_j \neq 0, \\ 0, & j \in J_0, \nu_j = 0. \end{cases}$$

Из (2.75) вытекает, что если $\nu_j = 0$, то и $\mu_j = 0$. Поэтому $I_0 = S_1 I_1$. Кроме того,

$$\|S_1 z\|^p = \sum_{j \in J, \nu_j \neq 0} \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p} |z_j|^p.$$

При $j \in J$ и $\nu_j \neq 0$ из (2.75) вытекает, что $|\mu_j|^p / |\nu_j|^p \leq \lambda_1$. Поэтому

$$\|S_1 z\|^p \leq \lambda_1 \sum_{j \in J, \nu_j \neq 0} |z_j|^p \leq \lambda_1 \|z\|_{l_p}^p.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.19. $\square$

Рассмотрим более внимательно случай, когда $k = 1$. Может оказаться, что в рассматриваемой задаче восстановления существуют оптимальные методы, которые используют не все элементы вектора $y \in l_p^0$ (приближенного значения вектора $x \in W$), а только часть координат этого вектора. Действительно, некоторые из α_j можно взять равными нулю. Подставив $\alpha_j = 0$ в условие (2.68), получим условие

$$(2.77) \quad \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p} \leq \lambda_1.$$

Координаты вектора y с такими номерами не несут полезной информации в том смысле, что существует оптимальный метод, не использующий их. Положив

$$D = \left\{ j \in J_0 : \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p} > \lambda_1 \right\},$$

получаем, что среди оптимальных методов существуют методы, использующие информацию о приближенных значениях вектора $x \in W$ только с координатами из множества D . Вид множества

$$\Omega_D = \{ (|\nu_j|^p, |\mu_j|^p) : j \in D \}$$

показан на рис. 2.6.4.

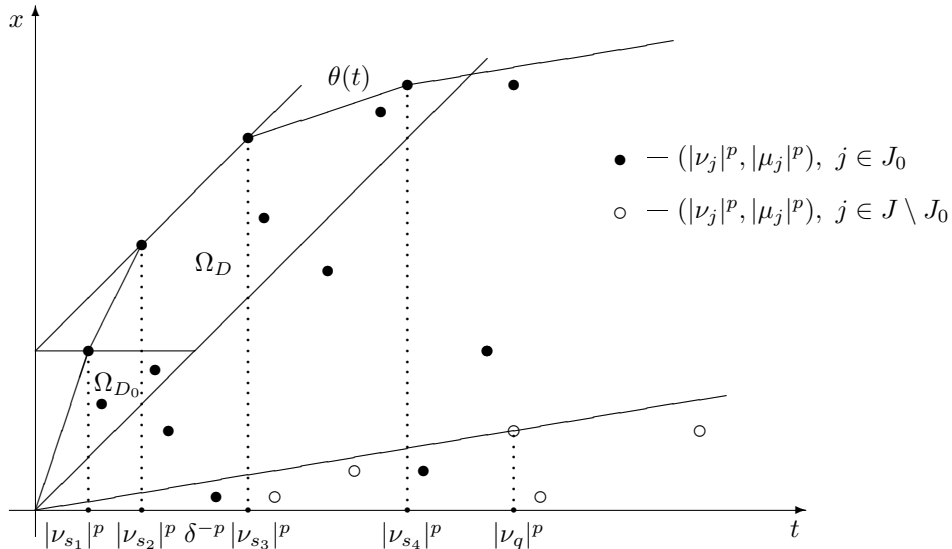


Рис. 2.6.4

Если положить $\alpha_j = \mu_j$, то из условия (2.68) получится неравенство

$$|\mu_j|^p \leq \lambda_2.$$

Таким образом, координаты приближенного вектора y с номерами, при которых удовлетворяется это неравенство, могут восстанавливаться так же, как действует на них восстанавливаемый оператор. Положим

$$D_0 = \{ j \in J_0 : |\mu_j|^p \leq \lambda_2 \}, \quad \Omega_{D_0} = \{ (|\nu_j|^p, |\mu_j|^p) : j \in D_0 \}.$$

Вид множества Ω_{D_0} показан на рис. 2.6.4.

Тем самым имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2.21. Пусть δ_1^p/δ_2^p принадлежит промежутку $\mathbb{R}_+$, на котором $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$, и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Тогда методы

$$(2.78) \quad \widehat{\varphi}(y) = \begin{cases} \mu_j y_j, & j \in D_0, \\ \alpha_j y_j, & j \in D \setminus D_0, \\ 0, & J \setminus D, \end{cases}$$

где α_j удовлетворяют условиям (2.68), являются оптимальными.

Методы (2.78), кроме того, что они используют лишь часть исходной информации, обладают еще одним замечательным свойством. Они являются не только оптимальными на классе W , но и на более широком классе, а именно, на классе $W + L$, где

$$L = \text{lin}\{e_j\}_{j \in D_0}$$

($\text{lin } A$ — линейная оболочка элементов из A), а $\{e_j\}_{j \in J}$ — стандартный базис в l_p .

Пусть $V \subset l_p$. Положим

$$e(V, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{x \in V, y \in l_p^0 \\ \|I_2 x - y\|_{l_p^0} \leq \delta_2}} \|I_0 x - \varphi(y)\|_{l_p},$$

а

$$E(V, \delta_2) = \inf_{\varphi: l_p^0 \rightarrow l_p} e(V, \delta_2, \varphi).$$

ТЕОРЕМА 2.22. Пусть δ_1^p/δ_2^p принадлежит тому промежутку на $\mathbb{R}_+$, где $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Тогда

$$E(W + L, \delta_2) = E(W, \delta_2) = (\lambda_1 \delta_1^p + \lambda_2 \delta_2^p)^{1/p},$$

а методы (2.78) являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что $W \subset W + L$, имеем

$$(2.79) \quad E(W, \delta_2) \leq E(W + L, \delta_2).$$

Оценим погрешность методов (2.78) на классе $W + L$. Пусть $x \in W + L$. Тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in W$, а $x_2 \in L$. Если $y \in l_p^0$ и $\|I_2 x - y\|_{l_p^0} \leq \delta_2$, то, положив $y_1 = y - I_2 x_2$, будем иметь $\|I_2 x_1 - y_1\|_{l_p^0} \leq \delta_2$. Таким образом,

$$\|I_0 x - \widehat{\varphi}(y)\|_{l_p} = \|I_0 x_1 - \widehat{\varphi}(y_1) + I_0 x_2 - \widehat{\varphi}(I_2 x_2)\|_{l_p} = \|I_0 x_1 - \widehat{\varphi}(y_1)\|_{l_p}.$$

Так как $\widehat{\varphi}(\cdot)$ — оптимальный метод на классе W , то

$$\|I_0 x_1 - \widehat{\varphi}(y_1)\|_{l_p} \leq e(W, \delta_2, \widehat{\varphi}) = E(W, \delta_2).$$

Тем самым

$$\|I_0 x - \widehat{\varphi}(y)\|_{l_p} \leq E(W, \delta_2).$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по всем $x \in W + L$, и $y \in l_p^0$ таким, что $\|I_2 x - y\|_{l_p^0} \leq \delta_2$, получаем

$$E(W + L, \delta_2) \leq E(W, \delta_2),$$

что вместе с (2.79) завершает доказательство. $\square$

Рассмотрим теперь задачу восстановления первой производной функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-ijt} dt, \quad j \in \mathbb{Z},$$

заданных с погрешностью. В отличие от п.1.5 здесь погрешность задания коэффициентов Фурье будем измерять в метрике пространства l_2 . Более точно,

будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ нам известен вектор $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ такой, что

$$\|Fx - y\|_{l_2} \leq \delta, \quad Fx = \{x_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \quad \delta > 0.$$

В силу того, что

$$Fx' = I_0\{x_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{ijx_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \quad Fx'' = I_1\{x_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{-j^2x_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$$

(в рассматриваемом случае $J = J_0 = \mathbb{Z}$), эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной выше. Условие (2.68) имеет в этом случае вид

$$\frac{|ij - \alpha_j|^2}{\lambda_1 j^4} + \frac{|\alpha_j|^2}{\lambda_2} \leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \neq 0.$$

Его можно записать в виде

$$(2.80) \quad \left| \alpha_j - \frac{ij\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 j^4} \right| \leq \frac{j^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 + \lambda_1 j^4} \sqrt{\lambda_2 + \lambda_1 j^4 - j^2}$$

(в силу (2.75) подкоренное выражение в правой части этого неравенства неотрицательно). Коэффициенты α_j , удовлетворяющие (2.80), могут быть записаны в виде

$$\alpha_j = ij \frac{\lambda_2 + \theta_j |j| \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_1 j^4 - j^2)}}{\lambda_2 + \lambda_1 j^4},$$

где $|\theta_j| \leq 1$.

Пусть $(s+1)^{-2} \leq \delta < s^{-2}$ при некотором $s \in \mathbb{N}$. На отрезке $[s^4, (s+1)^4]$ ломаная $\theta(t)$ записывается в виде $\theta(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$, где

$$\lambda_1 = \frac{1}{s^2 + (s+1)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{s^2(s+1)^2}{s^2 + (s+1)^2}.$$

Из теоремы 2.20 (при $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta$) получаем

ТЕОРЕМА 2.23. *При $(s+1)^{-2} \leq \delta < s^{-2}$ имеет место равенство*

$$E(I, (1, \delta)) = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 \delta^2} = \sqrt{\frac{1 + \delta^2 s^2 (s+1)^2}{s^2 + (s+1)^2}}.$$

При этом методы

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ij \frac{\lambda_2 + \theta_j |j| \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_1 j^4 - j^2)}}{\lambda_2 + \lambda_1 j^4} y_j e^{ijt},$$

где $|\theta_j| \leq 1$, $j \in \mathbb{Z}$, являются оптимальными. При $\delta \geq 1$ метод $\widehat{\varphi}(y)(t) \equiv 0$ — оптимальный, а его погрешность равна 1.

Для множества D в рассматриваемой задаче имеет место равенство $D = [-N, -1] \cup [1, N]$, где

$$N = \left\lceil \sqrt{2s^2 + 2s + 1} \right\rceil - 1, \quad [a] = \min\{k \in \mathbb{Z} : a \leq k\}.$$

Для множества D_0 при $s \geq 2$ имеем $D_0 = [-n, -1] \cup [1, n]$, где

$$n = \left\lfloor \frac{s(s+1)}{\sqrt{2s^2 + 2s + 1}} \right\rfloor, \quad [a] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}.$$

Таким образом, из следствия 2.21 и теоремы 2.22 вытекает, что методы

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{0 < |j| \leq n} ij y_j e^{ijt} + \sum_{n < |j| \leq N} ij \frac{\lambda_2 + \theta_j |j| \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_1 j^4 - j^2)}}{\lambda_2 + \lambda_1 j^4} y_j e^{ijt}$$

являются оптимальными не только на классе $W_2^2(\mathbb{T})$, но и на классе $W_2^2(\mathbb{T}) + \mathcal{T}_n$, где $\mathcal{T}_n$ — пространство тригонометрических полиномов степени не выше n .

2.7. Адаптивная информация

Пусть X — линейное пространство, Z — линейное нормированное пространство, $T: X \rightarrow Z$ — линейный оператор и $W \subset X$. Рассматривается задача о восстановлении значений оператора T на элементах множества $W \subset X$ по неточной информации об этих элементах. Предположим, что имеется семейство $\mathcal{I}$ линейных информационных операторов $I_p: X \rightarrow Y$, где $p \in \Omega$, Ω — некоторое множество, а Y — линейное нормированное пространство. Выберем n параметров $p_1, \dots, p_n$ и будем считать, что для каждого $x \in W$ известны элементы $y_1, \dots, y_n$ такие, что

$$\|I_{p_j}x - y_j\|_Y \leq \delta, \quad j = 1, \dots, n, \quad \delta \geq 0.$$

Под методами восстановления оператора T будем понимать всевозможные отображения $\varphi: Y^n \rightarrow Z$. Погрешностью метода восстановления φ назовем величину

$$e_n(T, W, \mathcal{I}, \delta, \mathbf{p}, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, \mathbf{y}=(y_1, \dots, y_n) \in Y^n \\ \|I_{p_j}x - y_j\|_Y \leq \delta, j=1, \dots, n}} \|Tx - \varphi(\mathbf{y})\|_Z;$$

здесь $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_n(T, W, \mathcal{I}, \delta) = \inf_{p_1, \dots, p_n \in \Omega} \inf_{\varphi: Y^n \rightarrow Z} e_n(T, W, \mathcal{I}, \delta, \mathbf{p}, \varphi)$$

Параметры $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$ и метод $\hat{\varphi}$ будем называть оптимальными, если

$$e_n(T, W, \mathcal{I}, \delta, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = E_n(T, W, \mathcal{I}, \delta), \quad \hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n).$$

Одним из характерных примеров поставленной задачи является задача об оптимальном интегрировании функции. Пусть W — класс функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Положим

$$Tx = \int_a^b x(t) dt, \quad I_{t_j}x = x(t_j), \quad t_j \in [a, b], \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда рассмотренная выше задача становится задачей о выборе оптимального метода интегрирования и оптимальных узлов интегрирования, в которых следует измерять функцию. Этой задаче посвящено довольно много исследований (см., например, книгу С. М. Никольского [74]). В п.1.3 рассматривался один из простейших вариантов подобной задачи.

На практике довольно часто используется другой подход, в котором последующие узлы интегрирования находятся в зависимости от значений функции в предыдущих узлах. Такие алгоритмы называются *адаптивными*. В связи с этим имеет смысл рассматривать несколько иную (более общую) постановку задачи оптимального восстановления.

Пусть $\omega_1 \in \Omega$ и заданы функции

$$\omega_j: Y^{j-1} \rightarrow \Omega, \quad j = 2, \dots, n.$$

В случае использования адаптивной информации мы предполагаем, что для каждого $x \in W$ мы знаем вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ такой, что

$$\|I_{p_j}x - y_j\|_Y \leq \delta, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $p_1 = \omega_1$, а

$$(2.81) \quad p_j = \omega_j(y_1, \dots, y_{j-1}), \quad j = 2, \dots, n.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения

$$\varphi: Y^n \rightarrow Z.$$

Для $x \in W$ положим

$$\Lambda(x) = \{ (y_1, \dots, y_n) : \|I_{p_j}x - y_j\|_Y \leq \delta, j = 1, \dots, n \},$$

где $p_1 = \omega_1$, а $p_j, j = 2, \dots, n$, определены равенствами (2.81). Погрешностью метода φ назовем величину

$$e_n^a(T, W, \mathcal{I}, \delta, \omega, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W \\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \Lambda(x)}} \|Tx - \varphi(\mathbf{y})\|_Z;$$

где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Величину

$$E_n^a(T, W, \mathcal{I}, \delta) = \inf_{\omega, \varphi} e_n^a(T, W, \mathcal{I}, \delta, \omega, \varphi)$$

назовем *погрешностью оптимального адаптивного восстановления*.

У адаптивных методов более богатая структура и естественно ожидать, что при адаптивном восстановлении погрешность будет меньше, чем при использовании неадаптивных методов. Так и происходит при нахождении нулей функции или нахождении максимума унимодальной функции (заметим, что в этих примерах восстанавливаемый оператор, точнее функционал, не является линейным). Тем не менее, существуют ситуации, когда адаптивная информация не дает выигрыша по сравнению с неадаптивной. В таких случаях вместо более сложных адаптивных методов имеет смысл использовать, как правило, просто устроенные неадаптивные методы.

При адаптивном восстановлении мы фактически имеем дело с отображением

$$(2.82) \quad \Phi(\mathbf{y}) = (\omega_1, \omega_2(y_1), \dots, \omega_n(y_1, \dots, y_{n-1}))$$

которое каждому $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ставит в соответствие значения параметров $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ по формуле $\mathbf{p} = \Phi(\mathbf{y})$. Можно обобщить постановку задачи об адаптивном восстановлении, рассматривая всевозможные отображения $\Phi(\mathbf{y})$.

Будем рассматривать следующую задачу оптимального адаптивного восстановления. Пусть X, Z, T и W такие же, как и выше, и $\mathcal{Y}$ — линейное пространство. Предположим, что имеется множество параметров $\mathcal{P}$ и для каждого $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ определено многозначное отображение

$$F_{\mathbf{p}}: W \rightarrow \mathcal{Y}$$

(т. е. $F_{\mathbf{p}}(x)$ — некоторое множество из $\mathcal{Y}$ для каждого $x \in W$). Отображение $F_{\mathbf{p}}$ представляет собой неадаптивную информацию, соответствующую параметру $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех отображений $F_{\mathbf{p}}$.

Предположим, кроме того, что задано отображение

$$\Phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{P}.$$

В качестве методов восстановления оператора T будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow Z$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e^a(T, \mathcal{F}, \Phi, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W \\ \mathbf{y} \in F_{\Phi(\mathbf{y})}(x)}} \|Tx - \varphi(\mathbf{y})\|_Z,$$

а величину

$$E^a(T, \mathcal{F}) = \inf_{\Phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{P}} \inf_{\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow Z} e^a(T, \mathcal{F}, \Phi, \varphi)$$

назовем *погрешностью оптимального адаптивного восстановления*.

В этой постановке адаптивная процедура получения информации в явном виде не видна, но она содержится в множестве всех отображений Φ (достаточно взять Φ в виде (2.82)).

Под *неадаптивной задачей восстановления* в рассматриваемом случае будем понимать задачу о нахождении величины

$$(2.83) \quad E(T, \mathcal{F}) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \inf_{\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow Z} e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}, \varphi),$$

где

$$e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W \\ \mathbf{y} \in F_{\mathbf{p}}(x)}} \|Tx - \varphi(\mathbf{y})\|_Z,$$

а также задачу о нахождении параметров и методов, на которых достигается нижняя грань.

Если $\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{p}$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, то

$$e^a(T, \mathcal{F}, \Phi, \varphi) = e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}, \varphi).$$

Поэтому

$$(2.84) \quad E^a(T, \mathcal{F}) \leq E(T, \mathcal{F}).$$

ТЕОРЕМА 2.24. *Предположим, что для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ множество $\text{gr } F_{\mathbf{p}}$ является центрально-симметричным и содержит 0. Тогда*

$$E^a(T, \mathcal{F}) \geq \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} D(\mathbf{p}),$$

где

$$D(\mathbf{p}) = \sup_{x \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(0)} \|Tx\|_Z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $E^a(T, \mathcal{F})$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\hat{\Phi}$ и $\hat{\varphi}$ такие, что

$$e^a(T, \mathcal{F}, \hat{\Phi}, \hat{\varphi}) \leq E^a(T, \mathcal{F}) + \varepsilon.$$

Рассмотрим величину $D(\hat{\Phi}(0))$. Для любого $\eta > 0$ существует элемент $\hat{x} \in F_{\hat{\Phi}(0)}^{-1}(0)$ такой, что

$$\|T\hat{x}\|_Z \geq D(\hat{\Phi}(0)) - \eta.$$

Так как множество $\text{gr } F_{\hat{\Phi}(0)}$ центрально-симметрично, $-\hat{x} \in F_{\hat{\Phi}(0)}^{-1}(0)$. Имеем

$$\begin{aligned} 2(D(\hat{\Phi}(0)) - \eta) &\leq 2\|T\hat{x}\|_Z = \|T\hat{x} - \hat{\varphi}(0) - (T(-\hat{x}) - \hat{\varphi}(0))\|_Z \\ &\leq \|T\hat{x} - \hat{\varphi}(0)\|_Z + \|T(-\hat{x}) - \hat{\varphi}(0)\|_Z \leq 2e^a(T, \mathcal{F}, \hat{\Phi}, \hat{\varphi}) \\ &\leq 2(E^a(T, \mathcal{F}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$D(\hat{\Phi}(0)) \leq E^a(T, \mathcal{F}).$$

Следовательно,

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} D(\mathbf{p}) \leq E^a(T, \mathcal{F}).$$

□

Положим

$$e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}) = \inf_{\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow Z} e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}, \varphi).$$

ЛЕММА 2.25. *Предположим, что для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ множество $\text{gr } F_{\mathbf{p}}$ является выпуклым и центрально-симметричным. Тогда для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$*

$$e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}) \leq 2D(\mathbf{p}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{gr } F_{\mathbf{p}}$ множество $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, для которых $F_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{y}) \neq \emptyset$. Если $\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{gr } F_{\mathbf{p}}$ и $x_1, x_2 \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{y})$, то в силу выпуклости и центральной симметрии $\text{gr } F_{\mathbf{p}}$ $h = (x_1 - x_2)/2 \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(0)$. Положим

$$\varphi_0(\mathbf{y}) = \begin{cases} Tx(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{gr } F_{\mathbf{p}}, \\ 0, & \mathbf{y} \notin \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{gr } F_{\mathbf{p}}, \end{cases}$$

где $x(\mathbf{y})$ элемент $F_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{y})$. Тогда для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$

$$\sup_{x \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - \varphi_0(\mathbf{y})\|_Z \leq 2\|Th\|_Z \leq 2D(\mathbf{p}),$$

где $h = (x - x(\mathbf{y}))/2 \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(0)$. Таким образом,

$$e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}, \varphi_0) = \sup_{\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{gr } F_{\mathbf{p}}} \sup_{x \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - \varphi_0(\mathbf{y})\|_Z \leq 2D(\mathbf{p}).$$

Следовательно, для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$

$$e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}) \leq e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}, \varphi_0) \leq 2D(\mathbf{p}).$$

□

В силу неравенства (2.84) из теоремы 2.24 и леммы 2.25 получаем

ТЕОРЕМА 2.26. *Если множество $\text{gr } F_{\mathbf{p}}$ выпукло и центрально-симметрично при всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, то*

$$\frac{1}{2}E(T, \mathcal{F}) \leq E^a(T, \mathcal{F}) \leq E(T, \mathcal{F}).$$

ТЕОРЕМА 2.27. *Предположим, что при всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ множество $\text{gr } F_{\mathbf{p}}$ центрально-симметрично, содержит 0 и выполнено равенство*

$$(2.85) \quad e(T, \mathcal{F}, \mathbf{p}) = D(\mathbf{p}).$$

Тогда

$$(2.86) \quad E^a(T, \mathcal{F}) = E(T, \mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.24 следует, что

$$E(T, \mathcal{F}) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} D(\mathbf{p}) \leq E^a(T, \mathcal{F}).$$

Учитывая (2.84), получаем (2.86). □

Таким образом, в случае, когда выполнено условие (2.85) неадаптивные оптимальные методы дают такую же ошибку, что и адаптивные. Иными словами, адаптивная информация в этом случае не помогает. Условие (2.85) выполнено, если T — линейный функционал, а $\mathcal{F}$ состоит из выпуклых уравновешенных отображений (см. (2.12)). В ряде случаев оно выполняется и для линейных операторов.

2.8. Критерий существования линейного оптимального неадаптивного метода в задаче адаптивного восстановления

Определим отображение G_{Φ} его графиком

$$\text{gr } G_{\Phi} = \{ (x, \mathbf{y}) \in W \times \mathcal{Y} : (x, \mathbf{y}) \in \text{gr } F_{\Phi(\mathbf{y})} \}.$$

Пусть $\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{gr } G_{\Phi}$. Величина

$$r(T, \mathcal{F}, \Phi, \mathbf{y}) = \inf_{z \in Z} \sup_{x \in G_{\Phi}^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - z\|_Z$$

— *чебышевский радиус* множества $T(G_\Phi^{-1}(\mathbf{y}))$. Величину

$$R^a(T, \mathcal{F}) = \inf_{\Phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{P}} \sup_{\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi} r(T, \mathcal{F}, \Phi, \mathbf{y})$$

будем называть *адаптивным радиусом информации* в задаче оптимального адаптивного восстановления, а величину

$$R(T, \mathcal{F}) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \sup_{\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } F_{\mathbf{p}}} \inf_{z \in Z} \sup_{x \in F_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - z\|_Z$$

— *неадаптивным радиусом информации* в задаче оптимального неадаптивного восстановления. Аналогичная величина вводилась в п. 2.1 (см. (2.3)).

Из леммы 2.2 вытекает, что

$$(2.87) \quad E(T, \mathcal{F}) = R(T, \mathcal{F}).$$

Используя ту же схему доказательства, получаем аналогичный результат для адаптивного радиуса.

ЛЕММА 2.28. *Имеет место равенство*

$$E^a(T, \mathcal{F}) = R^a(T, \mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow Z$ — произвольный метод восстановления. Тогда для всех $\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi$

$$r(T, \mathcal{F}, \Phi, \mathbf{y}) \leq \sup_{x \in G_\Phi^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - \varphi(\mathbf{y})\|_Z \leq e^a(T, \mathcal{F}, \Phi, \varphi).$$

Взяв в левой части верхнюю грань по всем $\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi$, а затем нижнюю грань в правой части по всем методам, получим неравенство

$$\sup_{\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi} r(T, \mathcal{F}, \Phi, \mathbf{y}) \leq \inf_{\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow Z} e^a(T, \mathcal{F}, \Phi, \varphi).$$

Отсюда

$$(2.88) \quad R^a(T, \mathcal{F}) \leq E^a(T, \mathcal{F}).$$

Докажем противоположное неравенство. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi$ существует $z_\varepsilon(\mathbf{y}) \in Z$, для которого

$$\sup_{x \in G_\Phi^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - z_\varepsilon(\mathbf{y})\|_Z \leq r(T, \mathcal{F}, \Phi, \mathbf{y}) + \varepsilon.$$

Определим метод $\varphi_\varepsilon: \mathcal{Y} \rightarrow Z$ следующим образом

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) = \begin{cases} z_\varepsilon(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi, \\ 0, & \mathbf{y} \notin \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^a(T, \mathcal{F}, \Phi, \varphi_\varepsilon) &= \sup_{(x, \mathbf{y}) \in G_\Phi} \|Tx - \varphi_\varepsilon(\mathbf{y})\|_Z \\ &= \sup_{\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi} \sup_{x \in G_\Phi^{-1}(\mathbf{y})} \|Tx - \varphi_\varepsilon(\mathbf{y})\|_Z \leq \sup_{\mathbf{y} \in \text{Pr}_{\mathcal{Y}} \text{ gr } G_\Phi} (r(T, \mathcal{F}, \Phi, \mathbf{y}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E^a(T, \mathcal{F}) \leq R^a(T, \mathcal{F}) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$E^a(T, \mathcal{F}) \leq R^a(T, \mathcal{F}),$$

что вместе с (2.88) доказывает утверждение леммы. $\square$

Обозначим через $\mathcal{F}^{bco}$ множество всех отображений $\text{bco } F_{\mathbf{p}}$ (определение отображения $\text{bco } F$ давалось формулой (2.10)).

ТЕОРЕМА 2.29. Пусть x' — линейный функционал на X . Для существования линейного неадаптивного метода с оптимальным параметром $\hat{\mathbf{p}} \in \mathcal{P}$, который оптимален среди всех адаптивных методов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$(2.89) \quad R^a(x', \mathcal{F}) = R^a(x', \mathcal{F}^{bco})$$

и

$$(2.90) \quad D(\hat{\mathbf{p}}) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} D(\mathbf{p}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть метод $\hat{\varphi}(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y}', \mathbf{y} \rangle$, где $\mathbf{y}'$ — линейный функционал на Y , и параметр $\hat{\mathbf{p}} \in \mathcal{P}$ такие, что

$$e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = E^a(x', \mathcal{F}).$$

Предположим, что $(x, \mathbf{y}) \in \text{bco gr } F_{\hat{\mathbf{p}}}$. Тогда

$$(x, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (x_j, \mathbf{y}_j),$$

где $(x_j, \mathbf{y}_j) \in \text{gr } F_{\hat{\mathbf{p}}}$, $j = 1, \dots, m$, и $\sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\langle x', x \rangle - \langle \mathbf{y}', \mathbf{y} \rangle| &= \left| \sum_{j=1}^m \lambda_j (\langle x', x_j \rangle - \langle \mathbf{y}', \mathbf{y}_j \rangle) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq m} |\langle x', x_j \rangle - \langle \mathbf{y}', \mathbf{y}_j \rangle| \leq e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) \leq e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}).$$

Так как

$$(2.91) \quad \text{gr } F_{\hat{\mathbf{p}}} \subset \text{gr bco } F_{\hat{\mathbf{p}}},$$

то

$$e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) \geq e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}).$$

Таким образом,

$$(2.92) \quad e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}).$$

Отсюда

$$E(x', \text{bco } \mathcal{F}) \leq e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = E^a(x', \mathcal{F}).$$

Учитывая (2.84), имеем

$$(2.93) \quad E^a(x', \text{bco } \mathcal{F}) \leq E^a(x', \mathcal{F}).$$

Из (2.91) следует, что $E^a(x', \text{bco } \mathcal{F}) \geq E^a(x', \mathcal{F})$. Вместе с (2.93) это приводит к равенству

$$(2.94) \quad E^a(x', \text{bco } \mathcal{F}) = E^a(x', \mathcal{F}).$$

Теперь из леммы 2.28 следует равенство (2.89).

Докажем равенство (2.90). Как отмечалось выше, для линейных функционалов при всех $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ справедливо равенство

$$(2.95) \quad e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \mathbf{p}) = D(\mathbf{p}).$$

Принимая во внимание (2.92) и (2.94), получаем

$$\begin{aligned} D(\hat{\mathbf{p}}) &= e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}) \leq e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) \\ &= E^a(x', \mathcal{F}) = E^a(x', \text{bco } \mathcal{F}) \leq E(x', \text{bco } \mathcal{F}) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} D(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть имеют место равенства (2.89) и (2.90). В силу того, что множество $\text{bco} F_{\mathbf{p}}$ выпукло и уравновешенно для любого $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ существует линейный метод $\hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y}'_{\mathbf{p}}, \mathbf{y} \rangle$ такой, что

$$e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \mathbf{p}) = e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \mathbf{p}, \hat{\varphi}_{\mathbf{p}})$$

(см. теорему 2.4). Положим $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{\hat{\mathbf{p}}}$. Тогда из (2.95) и (2.90) получаем

$$e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = E(x', \text{bco } \mathcal{F}).$$

Кроме того, из (2.95) и теоремы 2.27 вытекает, что

$$E(x', \text{bco } \mathcal{F}) = E^a(x', \text{bco } \mathcal{F}).$$

Поэтому, учитывая равенство (2.92), получаем

$$\begin{aligned} e(x', \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) &= e(x', \text{bco } \mathcal{F}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\varphi}) = E^a(x', \text{bco } \mathcal{F}) \\ &= R^a(x', \text{bco } \mathcal{F}) = R^a(x', \mathcal{F}) = E^a(x', \mathcal{F}). \end{aligned}$$

□

2.9. Восстановление по информации со случайной ошибкой

Во всех предыдущих задачах ошибка, с которой задавалась исходная информация была детерминирована. Существуют постановки задач восстановления, в которых исходная информация содержит случайную ошибку. Одну из таких постановок мы сейчас рассмотрим.

Пусть X — линейное пространство, Z — линейное нормированное пространство и $T: X \rightarrow Z$ — линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора T на некотором множестве (классе) $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I: X \rightarrow K^{n+1}$ ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается X), заданным со случайной ошибкой. Более точно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_{\delta}(x) = \{y = (y_0, y_1, \dots, y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix, \mathbb{D}(y_j) \leq \delta, j = 0, 1, \dots, n\}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_{\delta}(x)$ элемент из пространства Z , принимаемый за приближение к значению Tx . Погрешностью метода восстановления $\varphi: K^{n+1} \rightarrow Z$ называется величина

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \left(\sup_{x \in W, y \in Y_{\delta}(x)} \mathbb{M}(\|Tx - \varphi(y)\|_Z^2) \right)^{1/2}$$

(рассматриваются только те методы, для которых эта величина определена). Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi} e(T, W, I, \delta, \varphi)$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым оптимальным.

Обозначим через l_2 пространство суммируемых с квадратом последовательностей $x = (x_0, x_1, \dots)$. Положим

$$W = \left\{ x \in l_2 : \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 < \infty \right\}, \quad W = \left\{ x \in W : \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \leq 1 \right\},$$

где $\nu_j > 0, j = 1, 2, \dots$. Пусть $\mu_j, j = 0, 1, \dots$, отличны от нуля и удовлетворяют условию $|\mu_j|^2 \leq C\nu_j, j = 1, 2, \dots$. Определим линейные операторы $T: W \rightarrow l_2$ и $I: W \rightarrow K^{n+1}$ следующим образом

$$Tx = (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \dots), \quad Ix = (x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Введем обозначения

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Будем считать, что последовательность $\{\gamma_j\}$ возрастает.

ТЕОРЕМА 2.30. Если $1/\delta \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$ при некотором $1 \leq j \leq n$, то

$$E(T, W, I, \delta) = \left(\delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^j \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k},$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^j \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k,$$

где $\{e_k\}$ — стандартный базис в l_2 , является оптимальным. Если $1/\delta > \xi_{n+1}$, то

$$E(T, W, I, \delta) = \left(\delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right)^2 \right)^{1/2},$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Оценка снизу. Зафиксируем элемент $\tau \in W$ такой, что

$$\tau_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, n+1, \quad \tau_j = 0, \quad j > n+1.$$

Без ограничения общности (как будет видно из дальнейшего) можно считать, что $\tau_0 \geq \tau_1 \geq \dots \geq \tau_n$. Введем множество

$$B = \{x \in l_2 : x_j = \pm \tau_j, \quad j = 0, 1, \dots\}.$$

Очевидно, что $B \subset W$. Положим

$$p_j = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

В силу условий на монотонность τ_j имеем

$$0 < p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n < 1.$$

Произвольный элемент $x \in B$ записывается в виде

$$x = \sum_{j=0}^{n+1} s_j(x) \tau_j e_j,$$

где $s_j(x) \in \{-1, 1\}$. Обозначим через $\{e'_j\}$ — стандартный базис в $\mathbb{K}^{n+1}$. Зададим распределение $\eta(x)$ для каждого $x \in B$

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } p_0, \\ \frac{s_0(x)\tau_0}{1-p_0}e'_0 & \text{с вероятностью } p_1-p_0, \\ \sum_{j=0}^1 \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}e'_j, & \text{с вероятностью } p_2-p_1, \\ \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}e'_j, & \text{с вероятностью } p_n-p_{n-1}, \\ \sum_{j=0}^n \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}e'_j, & \text{с вероятностью } 1-p_n. \end{cases}$$

Таким образом, для координат вектора $\eta(x) = (\eta_0(x), \eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$ имеем следующие распределения:

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } p_j, \\ \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}, & \text{с вероятностью } 1-p_j, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Несложно убедиться, что $\mathbb{M}(\eta_j(x)) = x_j$. Кроме того,

$$\mathbb{D}(\eta_j(x)) = (1-p_j) \frac{\tau_j^2}{(1-p_j)^2} - \tau_j^2 = \delta^2, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Следовательно, $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ для всех $x \in B$.

Пусть φ — произвольный метод восстановления. Учитывая, что число элементов в множестве B равно 2^{n+2} , получаем

$$\begin{aligned} (2.96) \quad e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &\geq \sup_{x \in B} \mathbb{M} \|Tx - \varphi(\eta(x))\|_{l_2}^2 \\ &= \sup_{x \in B} \left(\sum_{j=0}^{n+1} (p_j - p_{j-1}) \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{x \in B} \left(\sum_{j=0}^{n+1} (p_j - p_{j-1}) \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{j=0}^{n+1} (p_j - p_{j-1}) \sum_{x \in B} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2; \end{aligned}$$

здесь $p_{-1} = 0$, а $p_{n+1} = 1$. Положим

$$B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} = \{x \in B : s_0(x) = s_0, s_1(x) = s_1, \dots, s_{j-1}(x) = s_{j-1}\},$$

$j=0, 1, \dots, n+1$ (при $j=0$ это множество совпадает с B). Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sum_{x \in B} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sum_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2. \end{aligned}$$

Если $x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}$, то

$$x = \sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k + z(x), \quad z(x) = \sum_{k=j}^{n+1} s_k(x) \tau_k e_k.$$

Причем с каждым элементом

$$\sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k + z(x) \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}$$

в множестве $B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}$ содержится и элемент

$$\sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k - z(x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sum_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x) \tau_k}{1 - p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sum_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}} \left\| T \left(\sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k + z(x) \right) \right. \\ & \quad \left. - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x) \tau_k}{1 - p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sum_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}} \left\| T \left(\sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k \right) + Tz(x) \right. \\ & \quad \left. - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x) \tau_k}{1 - p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+3}} \sum_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}} \left(\left\| T \left(\sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k \right) + Tz(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x) \tau_k}{1 - p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 + \left\| T \left(\sum_{k=0}^{j-1} s_k \tau_k e_k \right) - Tz(x) - \varphi \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{s_k(x) \tau_k}{1 - p_k} e'_k \right) \right\|_{l_2}^2 \right) \\ &\geq \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sum_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_0, s_1, \dots, s_{j-1}}} \|Tz(x)\|_{l_2}^2 = \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+2}} \sup_{x \in B} \|Tz(x)\|_{l_2}^2 \\ &= (p_j - p_{j-1}) \sum_{k=j}^{n+1} |\mu_k|^2 \tau_k^2. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (2.96), получаем

$$\begin{aligned} e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &\geq \sum_{j=0}^{n+1} (p_j - p_{j-1}) \sum_{k=j}^{n+1} |\mu_k|^2 \tau_k^2 = \sum_{j=0}^{n+1} \left(\sum_{k=j}^{n+1} |\mu_k|^2 \tau_k^2 - \sum_{k=j+1}^{n+1} |\mu_k|^2 \tau_k^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} p_j |\mu_j|^2 \tau_j^2 = \sum_{j=0}^n \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2 + |\mu_{n+1}|^2 \tau_{n+1}^2. \end{aligned}$$

В силу произвольности метода φ имеет место следующая оценка

$$(2.97) \quad E^2(T, W, I, \delta) \geq \sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n+1} > 0}} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2 + |\mu_{n+1}|^2 \tau_{n+1}^2 \right) \\ = \sup_{\tau \in W} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\delta^2}{\delta^2 + |\tau_j|^2} |\mu_j|^2 |\tau_j|^2 + |\mu_{n+1}|^2 |\tau_{n+1}|^2 \right).$$

2. Оценка сверху. Найдем погрешность методов, имеющих вид

$$\varphi(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j e_j.$$

Положим $z(x) = y(x) - Ix$. Тогда $\mathbb{M}(z(x)) = 0$, $\mathbb{D}(z_j(x)) \leq \delta^2$, $j = 0, 1, \dots, n$. Имеем

$$e^2(T, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} \mathbb{M}(\|Tx - \varphi(y(x))\|_{l_2}^2) \\ = \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} \mathbb{M}(\|Tx - \varphi(Ix) + \varphi(z(x))\|_{l_2}^2) = \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} (\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 \\ + \mathbb{M}(\|\varphi(z(x))\|_{l_2}^2) - 2\mathbb{M}(\text{Re}(\varphi(z(x)), Tx - \varphi(Ix))));$$

здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в l_2 . Из вида φ следует, что

$$\mathbb{M}(\text{Re}(\varphi(z(x)), Tx - \varphi(Ix))) = \text{Re} \mathbb{M}\left(\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j z_j(x) e_j, Tx - \varphi(Ix)\right)\right) \\ = \sum_{j=0}^n \text{Re}((e_j, Tx - \varphi(Ix)) \alpha_j \mathbb{M}(z_j(x))) = 0.$$

Так как

$$\mathbb{M}(\|\varphi(z(x))\|_{l_2}^2) = \mathbb{M}\left(\sum_{j=0}^n |\alpha_j|^2 |z_j(x)|^2\right) = \sum_{j=0}^n |\alpha_j|^2 \mathbb{D}(z_j(x)),$$

то

$$e^2(T, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} \left(\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 + \sum_{j=0}^n |\alpha_j|^2 \mathbb{D}(z_j(x)) \right) \\ = \sup_{x \in W} \|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 + \delta^2 \sum_{j=0}^n |\alpha_j|^2.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 \rightarrow \max, \quad x \in W.$$

Перепишем эту задачу в виде

$$\sum_{j=0}^n |\mu_j - \alpha_j|^2 |x_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\mu_j|^2 |x_j|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \leq 1.$$

Отметим, что при $\alpha_0 \neq \mu_0$ значение задачи равно ∞ . Поэтому в дальнейшем считаем, что $\alpha_0 = \mu_0$. Из неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\mu_j - \alpha_j|^2 |x_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\mu_j|^2 |x_j|^2 &= \sum_{j=1}^n \frac{|\mu_j - \alpha_j|^2}{\nu_j} \nu_j |x_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|\mu_j|^2}{\nu_j} \nu_j |x_j|^2 \\ &\leq \max \left\{ \frac{|\mu_1 - \alpha_1|^2}{\nu_1}, \dots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}, \frac{|\mu_{n+1}|^2}{\nu_{n+1}}, \frac{|\mu_{n+2}|^2}{\nu_{n+2}}, \dots \right\} \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \end{aligned}$$

и того, что последовательность $\gamma_j = \sqrt{\nu_j}/|\mu_j|$ возрастающая, получаем

$$\sup_{x \in W} \|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 = \max \left\{ \frac{|\mu_1 - \alpha_1|^2}{\nu_1}, \dots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}, \frac{|\mu_{n+1}|^2}{\nu_{n+1}} \right\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &= \max \left\{ \frac{|\mu_1 - \alpha_1|^2}{\nu_1}, \dots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}, \frac{|\mu_{n+1}|^2}{\nu_{n+1}} \right\} + \delta^2 |\mu_0|^2 \\ &\quad + \delta^2 \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2. \end{aligned}$$

Положим

$$c_j = \frac{\alpha_j}{\mu_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда погрешность метода φ можно записать в виде

$$\begin{aligned} e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &= \max \left\{ \frac{|1 - c_1|^2}{\gamma_1^2}, \dots, \frac{|1 - c_n|^2}{\gamma_n^2}, \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \right\} + \delta^2 |\mu_0|^2 \\ &\quad + \delta^2 \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 |c_j|^2. \end{aligned}$$

2.1. Пусть $1/\delta \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$ при некотором $1 \leq j \leq n$. Тогда нетрудно показать, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{\gamma_{j+1}} \leq \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^j \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k} < \frac{1}{\gamma_j}.$$

Положим

$$c_1 = 1 - \gamma_1 \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^j \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\gamma_{j+1}} \leq \frac{1 - c_1}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_j}.$$

Пусть

$$c_k = 1 - \gamma_k \frac{1 - c_1}{\gamma_1}, \quad k = 2, \dots, j, \quad c_k = 0, \quad k = j+1, \dots, n.$$

Имеем

$$\frac{|1 - c_k|^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2}, \quad k = 2, \dots, j.$$

При $k \geq j+1$

$$\frac{|1 - c_k|^2}{\gamma_k^2} = \frac{1}{\gamma_k^2} \leq \frac{1}{\gamma_{j+1}^2} \leq \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2}.$$

Кроме того,

$$\frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2} \geq \frac{1}{\gamma_{j+1}^2} \geq \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}.$$

Поэтому

$$\max \left\{ \frac{|1 - c_1|^2}{\gamma_1^2}, \dots, \frac{|1 - c_n|^2}{\gamma_n^2}, \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \right\} = \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 c_k^2 = \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2} \\ &+ \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 ((1 - c_k)^2 - (1 - c_k) + c_k) = \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k^2}{\gamma_1^2} (1 - c_1)^2 \\ &- \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k}{\gamma_1} (1 - c_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 c_k = \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 c_k \\ &+ \frac{1 - c_1}{\gamma_1^2} \left(1 - c_1 + \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k (1 - c_1) - \delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^j \frac{\nu_k}{\gamma_k} \right) = \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 c_k \\ &+ \frac{1 - c_1}{\gamma_1^2} \left((1 - c_1) \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k \right) - \delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^j \frac{\nu_k}{\gamma_k} \right) = \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 c_k. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор $\hat{\tau} \in l_2$, имеющий вид

$$\hat{\tau}_0 \in \mathbb{R}, \quad \hat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 1, \dots, j, \quad \hat{\tau}_k = 0, \quad k = j+1, \dots$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \hat{\tau}_k^2 &= \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k} - 1 \right) = \frac{\delta^2 \gamma_1}{1 - c_1} \sum_{k=1}^j \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k \\ &= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k \right) - \delta^2 \sum_{k=1}^j \nu_k = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{\tau} \in W$. Подставляя $\hat{\tau}$ в оценку (2.97) и устремляя $\hat{\tau}_0$ к бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} E^2(T, W, I, \delta) &\geq \delta^2 |\mu_0|^2 + \sum_{k=1}^j \frac{\delta^2 |\mu_k|^2 \hat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \hat{\tau}_k^2} = \delta^2 |\mu_0|^2 \\ &+ \sum_{k=1}^j \frac{\delta^4 |\mu_k|^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k} - 1 \right)}{\delta^2 \frac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k}} = \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{(1 - c_1)\gamma_k}{\gamma_1} \right) \\ &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^j |\mu_k|^2 c_k = e^2(T, W, I, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

2.2. Пусть теперь $1/\delta > \xi_{n+1}$. Положим

$$c_k = 1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\max \left\{ \frac{|1 - c_1|^2}{\gamma_1^2}, \dots, \frac{|1 - c_n|^2}{\gamma_n^2}, \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \right\} = \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right)^2 = \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \\ &+ \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) - \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) = \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \\ &+ \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) - \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2} \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k \gamma_{n+1}}{\gamma_k} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) = \delta^2 |\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \\ &+ \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) - \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2} \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) \\ &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} (1 - \delta^2 \xi_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Положим

$$\hat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 = \delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) = \delta^2 \xi_{n+1}^2 < 1.$$

Рассмотрим вектор $\hat{\tau} \in l_2$, доопределив остальные координаты следующим образом

$$\hat{\tau}_0 \in \mathbb{R}, \quad \hat{\tau}_{n+1} = \frac{1}{\nu_{n+1}} \left(1 - \sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 \right), \quad \hat{\tau}_k = 0, \quad k = n+2, \dots$$

Очевидно, что $\hat{\tau} \in W$. Подставляя $\hat{\tau}$ в оценку (2.97) и устремляя $\hat{\tau}_0$ к бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} E^2(T, W, I, \delta) &\geq \delta^2 |\mu_0|^2 + \sum_{k=1}^n \frac{\delta^2 |\mu_k|^2 \hat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \hat{\tau}_k^2} + |\mu_{n+1}|^2 \hat{\tau}_{n+1}^2 \\ &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \sum_{k=1}^n \frac{\delta^4 |\mu_k|^2 \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right)}{\delta^2 \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}} + \frac{|\mu_{n+1}|^2}{\nu_{n+1}} \left(1 - \sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 \right) \\ &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) \right) \\ &= \delta^2 |\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^n |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} (1 - \delta^2 \xi_{n+1}^2) = e^2(T, W, I, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что метод φ является оптимальным. $\square$

Рассмотрим задачу восстановления функции или ее производной на соболевском классе по коэффициентам Фурье, заданным со случайной ошибкой. Обозначим через $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ пространство 2π -периодических функций (вообще говоря, комплекснозначных) с абсолютно непрерывной $(r-1)$ -ой производной и r -ой производной, принадлежащей $L_2(\mathbb{T})$. Положим

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Всякая функция $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ разлагается в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(x) e^{ijt}.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении оператора $D^k x(\cdot) = x^{(k)}(t)$, $0 \leq k < r$, на классе $W_2^r(\mathbb{T})$ по значениям коэффициентов Фурье $Ix = (c_0(x), c_1(x), c_{-1}(x), \dots, c_n(x), c_{-n}(x))$, заданным со случайной ошибкой. Иначе говоря, для каждого $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ рассматривается множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{y = (y_0, y_1, y_{-1}, \dots, y_n, y_{-n}) : \mathbb{M}(y) = Ix, \quad \mathbb{D}y_j \leq \delta^2, \\ j = 0, 1, -1, \dots, n, -n\}.$$

Далее ставится задача о нахождении оптимальной погрешности восстановления $E(D^k, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta)$ и оптимального метода восстановления.

Сопоставим каждому элементу $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ вектор из коэффициентов Фурье $(c_0(x), c_1(x), c_{-1}(x), \dots)$. Тогда оператору $D^k x(\cdot)$ будет сопоставлен вектор

$$(\chi_k c_0(x), i^k c_1(x), (-i)^k c_{-1}(x), (2i)^k c_2(x), (-2i)^k c_{-2}(x), \dots),$$

где

$$\chi_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Условие $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$ означает, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} j^{2r} |c_j(x)|^2 \leq 1.$$

Таким образом, мы приходим к задаче, рассмотренной выше с

$$\nu_{2j-1} = \nu_{2j} = j^{2r}, \quad \mu_{2j-1} = (ij)^k, \quad \mu_{2j} = (-ij)^k, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \mu_0 = \chi_k.$$

При этом

$$\xi_{2j-1} = \xi_{2j} = \left(2 \sum_{s=1}^{j-1} s^{2r} \left(\left(\frac{j}{s} \right)^{r-k} - 1 \right) \right)^{1/2}.$$

Из теоремы 2.30 получаем

ТЕОРЕМА 2.31. Если $1/\delta \in (\xi_{2j-1}, \xi_{2j+1}]$ при некотором $1 \leq j \leq n$, то

$$E(D^k, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left(\delta^2 \chi_k + 2\delta^2 \sum_{s=1}^j s^{2k} (1 - d_j s^{r-k}) \right)^{1/2},$$

где

$$d_j = \frac{2\delta^2 \sum_{s=1}^j s^{r+k}}{1 + 2\delta^2 \sum_{s=1}^j s^{2r}},$$

а метод

$$\varphi(y)(t) = \chi_k y_0 + \sum_{\substack{s=-j \\ s \neq 0}}^j (1 - d_j |s|^{r-k}) (is)^k y_s e^{ist}$$

является оптимальным. Если $1/\delta > \xi_{2n+1}$, то

$$E(D^k, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left(\delta^2 \chi_k + \frac{1}{(n+1)^{2(r-k)}} + 2\delta^2 \sum_{s=1}^n s^{2k} \left(1 - \left(\frac{s}{n+1} \right)^{r-k} \right)^2 \right)^{1/2},$$

а метод

$$\varphi(y)(t) = \chi_k y_0 + \sum_{\substack{s=-n \\ s \neq 0}}^n \left(1 - \left(\frac{s}{n+1} \right)^{r-k} \right) (is)^k y_s e^{ist}$$

является оптимальным.

2.10. Комментарии

2.1. Наиболее близкой к общей задаче оптимального восстановления и, в определенном смысле, истоковой для нее является задача о наилучшей квадратурной формуле. С. М. Никольский [73] пишет, что задача эта была поставлена А. Н. Колмогоровым. В 1965 году С. А. Смоляк [94], заменяя определенный интеграл на значение произвольного линейного функционала, а значения подынтегральной функции в точках на значения других линейных функционалов и допуская к рассмотрению не только линейные, а всевозможные методы, получает постановку задачи об оптимальном восстановлении линейного функционала. Им было доказано, что для выпуклого и центрально-симметричного множества среди оптимальных методов существует линейный. Этот результат с заменой центральной симметрии на уравнищенность был распространен на комплексный случай К. Ю. Осипенко [75]. Задача об оптимальном восстановлении в случае, когда информация о функционалах задана с погрешностью, была поставлена Н. С. Бахваловым, а существование линейного оптимального метода было доказано в работе А. Г. Марчука, К. Ю. Осипенко [72].

Дальнейшие обобщения рассматривались в работах С. А. Micchelli, T. J. Rivlin [15], В. В. Арестова [31], Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [53] (см. также обзорную статью С. А. Micchelli, T. J. Rivlin [16] и монографии Дж. Трауб, Х. Вожняковский [100], Н. П. Корнейчук [47], J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski [30], L. Plaskota [28]).

Отметим, что существуют и другие постановки задач оптимального восстановления, связанные с усреднением погрешности восстановления, введением случайной ошибки и т. д. Ряд таких постановок можно найти в книгах J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski [30] и L. Plaskota [28]). Восстановление со случайной ошибкой в исходной информации рассмотрено в п. 2.9. Весьма близкой по сути к задаче восстановления по приближенной информации являются задача С. Б. Стечкина [95] о приближении неограниченного оператора ограниченными и работы школы А. Н. Тихонова по регуляризации (см., например, [99]).

2.2. Критерии существования линейных и аффинных оптимальных методов восстановления впервые стали изучаться в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [53]. Теорема 2.5 получена Г. Г. Магарил-Ильяевым, В. М. Тихомировым [71]. Утверждения, близкие к теореме 2.6, можно найти в работе С. А. Micchelli, T. J. Rivlin [15]. Однако еще у С. Я. Хавинсона [103] в связи с решением ряда экстремальных задач появился критерий, сформулированный в теореме 2.6, для топологического случая (хотя в явном виде задача об оптимальном восстановлении не обсуждалась). Теорема 2.8 в различной степени

общности доказывалась К. Ю. Осипенко [81], К. Ю. Осипенко, М. И. Стесиним [89], [25].

2.3. Круг проблем, связанных с задачей Стечкина, освещен в [32]. Связь задачи Стечкина с задачей оптимального восстановления линейного функционала и конкретные примеры получения решений задачи Стечкина из задач оптимального восстановления приведены в [58].

2.4. Теоремы 2.11 и 2.12 доказаны К. Ю. Осипенко [84].

2.5. Изучение задач восстановления линейных операторов в евклидовых пространствах было начато в работе А. А. Melkman, С. А. Micchelli [13]. Теорема 2.13, являющаяся развитием подхода, предложенного в этой работе, а также теоремы 2.14 и 2.15 доказывались в работах Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [57], [59] и К. Ю. Осипенко [86]. Лемма 2.17 содержится в книге L. Plaskota [28]. Пример 2.5 взят из работы А. А. Melkman, С. А. Micchelli [13].

2.6. Изучение семейств оптимальных методов восстановления для линейных операторов началось в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [61]. В дальнейшем семейства оптимальных методов восстановления строились в работах Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [62] и [65]. Теорема 2.19 доказана в работе К. Ю. Осипенко [20]. Теорема 2.20 в несколько менее общем виде доказана в работе К. Ю. Осипенко [87]. Более подробно построение методов, оптимальных на сумме некоторых классов и подпространств, рассматривается в п. 5.7.

2.7. Совпадение погрешностей оптимального восстановления линейного функционала на выпуклых центрально-симметричных множествах по адаптивной и неадаптивной информации было доказано Н. С. Бахваловым [36]. Теорема 2.26 (в несколько менее общем виде) доказывалась в работах S. Gal, С. А. Micchelli [9], Дж. Трауба, Х. Вожняковского [100]. Пример, когда адаптивная информация дает лучшую погрешность, чем неадаптивная можно найти в работе М. А. Кон, Е. Novak [10]. Теорема 2.27 взята из работы К. Ю. Осипенко [23].

2.8. Теорема 2.29 получена К. Ю. Осипенко [23].

2.9. Материал этого раздела взят из работы К. Ю. Кривошеева [48].

Оптимальное восстановление операторов в L_q -метриках

3.1. Общая задача о восстановлении в L_q -метриках

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ -алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ -аддитивная мера на Σ . Через $L_p(T, \mu)$ обозначим совокупность всех Σ -измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} = \begin{cases} \left(\int_T |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{vraisup}_{t \in T} |x(t)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{x(\cdot) \in L_p(T, \mu) : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)} < \infty\}, \\ W &= \{x(\cdot) \in \mathcal{W} : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)} \leq 1\}, \end{aligned}$$

где $1 \leq p, r \leq \infty$, а $\varphi(\cdot)$ — некоторая измеримая функция на T .

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda: \mathcal{W} \rightarrow L_q(T, \mu)$, $1 \leq q \leq \infty$, задаваемого равенством $\Lambda x(\cdot) = \psi(\cdot)x(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ — некоторая измеримая функция на T , на классе W по функции $x(\cdot) \in W$, известной с погрешностью на множестве $T_0 \subset T$ (будем считать, что функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ таковы, что оператор Λ отображает пространство $\mathcal{W}$ в $L_q(T, \mu)$).

Предполагается, что для каждой функции $x(\cdot) \in W$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(T_0, \mu)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta$, $\delta > 0$. Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m: L_p(T_0, \mu) \rightarrow L_q(T, \mu)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(p, q, r, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W, y(\cdot) \in L_p(T_0, \mu) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

Величина

$$(3.1) \quad E(p, q, r) = \inf_{m: L_p(T_0, \mu) \rightarrow L_q(T, \mu)} e(p, q, r, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Из леммы 2.1 (см. также (2.37)) следует, что

$$(3.2) \quad E(p, q, r) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

Рассмотрим соответствующую экстремальную задачу (для удобства мы переходим к q -ой степени)

$$(3.3) \quad \int_T |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_{T_0} |x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq 1.$$

Для решения этой экстремальной задачи нам потребуется некоторый вспомогательный результат.

Положим

$$F(u, v, \alpha) = -((1 - \alpha)u + \alpha v)^q + av^p + bu^r, \quad u, v \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in [0, 1],$$

где $a, b \in \mathbb{R}_+$ и $1 \leq p, q, r < \infty$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $1 \leq q < p, r < \infty$. Для любых $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a + b > 0$, существует единственное решение $\hat{u} > 0$ уравнения

$$(3.4) \quad -q + pa\hat{u}^{p-q} + rb\hat{u}^{r-q} = 0.$$

Кроме того, для всех $u, v \in \mathbb{R}_+$ и $\alpha = q^{-1}pa\hat{u}^{p-q} = 1 - q^{-1}rb\hat{u}^{r-q}$

$$(3.5) \quad F(\hat{u}, \hat{u}, \alpha) \leq F(u, v, \alpha).$$

В частности, при всех $u \in \mathbb{R}_+$

$$-\hat{u}^q + a\hat{u}^p + b\hat{u}^r \leq -u^q + au^p + bu^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения уравнения (3.4) следует из того, что непрерывная функция $f(u) = pa\hat{u}^{p-q} + rb\hat{u}^{r-q}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$.

Докажем неравенство (3.5). Случаи, когда $a = 0$ или $b = 0$, легко получить, рассматривая минимум функции $F(u, v, 0) = -u^q + bu^r$, если $a = 0$, или $F(u, v, 1) = -v^q + av^p$, если $b = 0$. Предположим, что $a, b > 0$. Тогда $\alpha \in (0, 1)$. Пусть

$$C > \max\{a^{-\frac{1}{p-q}}, b^{-\frac{1}{r-q}}\}.$$

Тогда для $u \geq C$ и $v \leq u$ имеем

$$(3.6) \quad F(u, v, \alpha) \geq -u^q + bu^r = u^q(-1 + bu^{r-q}) > 0.$$

Если $v \geq C$ и $v \geq u$, то

$$(3.7) \quad F(u, v, \alpha) \geq -v^q + av^p = v^q(-1 + av^{p-q}) > 0.$$

Так как $F(0, 0, \alpha) = 0$, то

$$\inf_{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2} F(u, v, \alpha) = \inf_{\substack{0 \leq u \leq C \\ 0 \leq v \leq C}} F(u, v, \alpha).$$

Из теоремы Вейрштрасса следует, что существуют $0 \leq u_0 \leq C$ и $0 \leq v_0 \leq C$ такие, что

$$\inf_{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2} F(u, v, \alpha) = F(u_0, v_0, \alpha).$$

В силу (3.6) и (3.7) $u_0 < C$ и $v_0 < C$. Вычислим частную производную

$$F_u(u, v, \alpha) = -q((1 - \alpha)u + \alpha v)^{q-1}(1 - \alpha) + rbu^{r-1} \\ = rb(-(1 - \alpha)u + \alpha v)^{q-1}\hat{u}^{r-q} + u^{r-1}.$$

Для любого $v_0 \geq 0$ и достаточно малых $u > 0$ $F_u(u, v_0, \alpha) < 0$. Следовательно,

$$F(u, v_0, \alpha) < F(0, v_0, \alpha)$$

для достаточно малых u . Это означает, что $0 < u_0 < C$. Из аналогичных рассуждений следует, что $0 < v_0 < C$. Тем самым

$$F_u(u_0, v_0, \alpha) = F_v(u_0, v_0, \alpha) = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} F_v(u, v, \alpha) &= -q((1 - \alpha)u + \alpha v)^{q-1}\alpha + pav^{p-1} \\ &= pa(-(1 - \alpha)u + \alpha v)^{q-1}\hat{u}^{p-q} + v^{p-1}), \end{aligned}$$

то

$$(3.8) \quad -((1 - \alpha)u_0 + \alpha v_0)^{q-1}\hat{u}^{r-q} + u_0^{r-1} = 0,$$

$$(3.9) \quad -((1 - \alpha)u_0 + \alpha v_0)^{q-1}\hat{u}^{p-q} + v_0^{p-1} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{u_0^{r-1}}{v_0^{p-1}} = \hat{u}^{r-p}.$$

Предположим, что $p \leq r$. Подставляя

$$(3.10) \quad u_0 = \hat{u}^{\frac{r-p}{r-1}} v_0^{\frac{p-1}{r-1}}$$

в (3.9), получаем равенство

$$(\alpha v_0 + (1 - \alpha)\hat{u}^{\frac{r-p}{r-1}} v_0^{\frac{p-1}{r-1}})^{q-1}\hat{u}^{p-q} = v_0^{p-1}.$$

Это равенство можно записать в виде

$$(3.11) \quad (\alpha + (1 - \alpha)t^{\frac{p-r}{r-1}})^{q-1} = t^{p-q},$$

где $t = v_0\hat{u}^{-1}$. Легко видеть, что равенство (3.11) имеет единственное решение $t = 1$. Следовательно, $v_0 = \hat{u}$, а из (3.10) вытекает, что $u_0 = \hat{u}$.

Если $p > r$, то подставляем

$$v_0 = \hat{u}^{\frac{p-r}{p-1}} u_0^{\frac{r-1}{p-1}}$$

в (3.8). Аналогично предыдущему случаю получаем равенство, которое можно записать в виде

$$(3.12) \quad (\alpha s^{\frac{r-p}{p-1}} + 1 - \alpha)^{q-1} = s^{r-q},$$

где $s = u_0\hat{u}^{-1}$. Единственным решением уравнения (3.12) является $s = 1$. Таким образом, для случая, когда $p > r$, получаем то же решение уравнений (3.8), (3.9) $u_0 = v_0 = \hat{u}$. Тем самым для всех $u, v \in \mathbb{R}_+$

$$F(u, v, \alpha) \geq \inf_{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2} F(u, v, \alpha) = F(\hat{u}, \hat{u}, \alpha).$$

□

Обозначим через $\chi_0(\cdot)$ характеристическую функцию множества T_0 :

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 \leq q < p, r < \infty, \lambda_1, \lambda_2 > 0, \varphi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T \setminus T_0, \hat{x}(t) = \hat{x}(t, \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ — решение уравнения

$$(3.13) \quad -q|\psi(t)|^q + p\lambda_1 x^{p-q}(t)\chi_0(t) + r\lambda_2 |\varphi(t)|^r x^{r-q}(t) = 0,$$

а λ_1, λ_2 таковы, что

$$(3.14) \quad \int_{T_0} \hat{x}^p(t) d\mu(t) = \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^r \hat{x}^r(t) d\mu(t) = 1.$$

Тогда

$$(3.15) \quad E(p, q, r) = \left(\frac{p\lambda_1\delta^p + r\lambda_2}{q} \right)^{1/q},$$

а метод

$$(3.16) \quad \widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} q^{-1}p\lambda_1\widehat{x}^{p-q}(t)|\psi(t)|^{-q}\psi(t)y(t), & t \in T_0, \psi(t) \neq 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Оценка снизу. Если элемент $t \in T$ такой, что $\psi(t) = 0$, то $\widehat{x}(t) = 0$. Если $\psi(t) \neq 0$, то из леммы 3.1 вытекает, что решение уравнения (3.13) существует и единственно. В силу условий (3.14) функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой для экстремальной задачи (3.3). Из (3.13) следует, что

$$|\psi(t)|^q \widehat{x}^q(t) = q^{-1}p\lambda_1\widehat{x}^p(t)\chi_0(t) + q^{-1}r\lambda_2|\varphi(t)|^r \widehat{x}^r(t).$$

Тем самым

$$E^q(p, q, r) \geq \int_T |\psi(t)|^q \widehat{x}^q(t) d\mu(t) = \frac{p\lambda_1\delta^p + r\lambda_2}{q}.$$

2. Оценка сверху. Для нахождения погрешности метода (3.16) нужно найти значение следующей экстремальной задачи (здесь снова для удобства мы переходим к q -ой степени)

$$(3.17) \quad \int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \alpha(t)\psi(t)y(t)|^q d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq 1,$$

где

$$(3.18) \quad \alpha(t) = \begin{cases} q^{-1}p\lambda_1\widehat{x}^{p-q}(t)|\psi(t)|^{-q}, & t \in T_0, \psi(t) \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Положим

$$z(t) = \begin{cases} x(t) - y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \in T \setminus T_0, \end{cases}$$

и запишем задачу (3.17) в виде

$$\int_T |\psi(t)|^q |(1 - \alpha(t))x(t) + \alpha(t)z(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_{T_0} |z(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq 1.$$

Так как $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, то значение этой задачи не превосходит значения следующей задачи

$$(3.19) \quad \int_T |\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_{T_0} v^p(t) d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^r u^r(t) d\mu(t) \leq 1, \\ u(t) \geq 0, \quad v(t) \geq 0 \quad \text{для почти всех } t \in T.$$

Функция Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \mu_1, \mu_2) = \int_T L(t, u(t), v(t), \mu_1, \mu_2) d\mu(t),$$

где

$$L(t, u, v, \mu_1, \mu_2) = -|\psi(t)|^q((1 - \alpha(t))u + \alpha(t)v)^q + \mu_1 v^p \chi_0(t) + \mu_2 |\varphi(t)|^r u^r.$$

Из леммы 3.1 вытекает, что

$$L(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t), \lambda_1, \lambda_2) \leq L(t, u(t), v(t), \lambda_1, \lambda_2).$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) \leq \mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2).$$

Для любых функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, допустимых в задаче (3.19) имеем

$$\begin{aligned} & - \int_T |\psi(t)|^q((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^q d\mu(t) \\ & \geq - \int_T |\psi(t)|^q((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^q d\mu(t) + \lambda_1 \left(\int_{T_0} v^p(t) d\mu(t) - \delta^p \right) \\ & \quad + \lambda_2 \left(\int_T |\varphi(t)|^r u^r(t) d\mu(t) - 1 \right) = \mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1 \delta^p - \lambda_2 \\ & \geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1 \delta^p - \lambda_2 = - \int_T |\psi(t)| \hat{x}^q(t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для погрешности метода $\hat{m}$ имеем оценку

$$e^q(p, q, r, \hat{m}) \leq \int_T |\psi(t)| \hat{x}^q(t) d\mu(t) = \frac{p\lambda_1 \delta^p + r\lambda_2}{q} \leq E^q(p, q, r).$$

Отсюда следует оптимальность метода (3.16) и равенство (3.15). $\square$

3.2. Случаи совпадения двух метрик

Начнем со случая, когда $r = p$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $1 \leq q < p < \infty$. Предположим, что $\mu_2 > 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (3.20) \quad & \int_{T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{1 + \mu_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \\ & = \delta^p \int_T |\varphi(t)|^p \left(\frac{|\psi(t)|^q}{\chi_0(t) + \mu_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) > 0 \end{aligned}$$

(от функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем требовать, чтобы указанные интегралы существовали). Тогда

$$E(p, q, p) = (\mu_1 \delta^p + \mu_1 \mu_2)^{1/q},$$

где

$$\mu_1 = \delta^{q-p} \left(\int_{T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{1 + \mu_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}},$$

а метод

$$\hat{m}(y)(t) = \begin{cases} \frac{\psi(t)}{1 + \mu_2 |\varphi(t)|^p} y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\lambda_1 = \frac{q\mu_1}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{q\mu_1\mu_2}{p}, \quad \widehat{x}(t) = \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p(\lambda_1\chi_0(t) + \lambda_2|\varphi(t)|^p)} \right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Легко проверить, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ удовлетворяет равенству (3.13). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{T_0} \widehat{x}^p(t) d\mu(t) &= \mu_1^{\frac{p}{q-p}} \int_{T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{1 + \mu_2|\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) = \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)|^p \widehat{x}^p(t) d\mu(t) &= \mu_1^{\frac{p}{q-p}} \int_T |\varphi(t)|^p \left(\frac{|\psi(t)|^q}{\chi_0(t) + \mu_2|\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) = 1. \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.2. $\square$

Рассмотрим случай, когда $r = q$. Положим

$$a_+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $1 \leq q < p < \infty$. Предположим, что $\widehat{\lambda}_2 > 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (3.21) \quad & \left(\int_{T_0} \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{1/p} \\ &= \delta \left(\int_T |\varphi(t)|^q \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{q}{p-q}} d\mu(t) \right)^{1/q} > 0 \end{aligned}$$

(от функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем требовать, чтобы указанные интегралы существовали). Тогда

$$(3.22) \quad E(p, q, q) = \left(\frac{p}{q} \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/q},$$

где

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{q}{p} \delta^{q-p} \left(\int_{T_0} \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}},$$

а метод

$$(3.23) \quad \widehat{m}(y)(t) = \psi(t) \left(1 - \widehat{\lambda}_2 \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q} \right)_+ y(t)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Оценка снизу. Положим

$$\widehat{x}(t) = \left(\frac{q}{p\widehat{\lambda}_1} \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+ \right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Из определения $\widehat{\lambda}_1$ вытекает, что

$$\int_{T_0} \widehat{x}^p(t) d\mu(t) = \delta^p.$$

Кроме того, учитывая (3.21),

$$\int_T |\varphi(t)|^q \widehat{x}^q(t) d\mu(t) = \left(\frac{q}{p\widehat{\lambda}_1} \right)^{\frac{q}{p-q}} \int_T |\varphi(t)|^q \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{q}{p-q}} d\mu(t) = 1.$$

Следовательно, функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой для экстремальной задачи (3.3). Тем самым

$$E^q(p, q, q) \geq \int_T |\psi(t)|^q \widehat{x}^q(t) d\mu(t).$$

В силу легко проверяемого равенства

$$(3.24) \quad |\psi(t)|^q \widehat{x}^q(t) = q^{-1} p \widehat{\lambda}_1 \widehat{x}^p(t) + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \widehat{x}^q(t)$$

имеем

$$E^q(p, q, q) \geq \int_T \left(q^{-1} p \widehat{\lambda}_1 \widehat{x}^p(t) + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \widehat{x}^q(t) \right) d\mu(t) = \frac{p}{q} \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_2.$$

2. Оценка сверху. Положим

$$\alpha(t) = \left(1 - \lambda_2 \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q} \right)_+.$$

Для оценки погрешности метода (3.23) надо найти значение следующей экстремальной задачи

$$(3.25) \quad \int_{T_0} |\psi(t)|^q |x(t) - \alpha(t)y(t)|^q d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max,$$

$$\int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^q d\mu(t) \leq 1.$$

Задача (3.25), положив $z(\cdot) = x(\cdot) - y(\cdot)$, переписывается в виде

$$(3.26) \quad \int_{T_0} |\psi(t)|^q |(1 - \alpha(t))x(t) + \alpha(t)z(t)|^q d\mu(t)$$

$$+ \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max,$$

$$\int_{T_0} |z(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^q |x(t)|^q d\mu(t) \leq 1.$$

Значение этой задачи очевидно совпадает со значением задачи

$$(3.27) \quad \int_{T_0} |\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))v(t) + \alpha(t)u(t))^q d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)|^q v^q(t) d\mu(t) \rightarrow \max,$$

$$\int_{T_0} u^p(t) d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^q v^q(t) d\mu(t) \leq 1,$$

$$u(t), v(t) \geq 0, \text{ для почти всех } t \in T.$$

Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_T L(u(t), v(t), \lambda_1, \lambda_2) d\mu(t),$$

где

$$L(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} -|\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^q \\ \quad + \lambda_1 u^p + \lambda_2 |\varphi(t)|^q v^q, & t \in T_0, \\ -|\psi(t)|^q v^q + \lambda_2 |\varphi(t)|^q v^q, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Положим $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ и

$$T_1 = \{ t \in T_0 : \alpha(t) > 0 \}.$$

Тогда при $t \in T_1$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = q \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q (v^{q-1} - ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^{q-1}).$$

Следовательно, при $t \in T_1$ и любом фиксированном $u \geq 0$ функция $L(u, v, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$ при $v \in [0, +\infty)$ достигает минимума для $v = u$. Таким образом, при $t \in T_1$

$$L(u, v, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq L(u, u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2).$$

Если $t \in T_0 \setminus T_1$, то $\alpha(t) = 0$ и $\hat{x}(t) = 0$. Поэтому

$$\int_{T_0 \setminus T_1} L(u(t), v(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t) \geq 0 = \int_{T_0 \setminus T_1} L(\hat{x}(t), \hat{x}(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t).$$

Используя равенство (3.24), несложно показать, что при $t \in T_1$

$$L(u, u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq L(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) &= \int_{T_1} L(u(t), v(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &+ \int_{T_0 \setminus T_1} L(u(t), v(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} L(u(t), v(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &\geq \int_{T_0} L(\hat{x}(t), \hat{x}(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} L(u(t), v(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) d\mu(t). \end{aligned}$$

В силу равенства (3.24) при $t \in T \setminus T_0$

$$L(u, v, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq L(\hat{x}(t), \hat{x}(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2).$$

Следовательно, для всех $u(t), v(t) \geq 0$

$$\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2).$$

Для любых функций $u(\cdot), v(\cdot)$, допустимых в задаче (3.27) имеем

$$\begin{aligned} & - \int_T |\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^q d\mu(t) \\ & \geq - \int_T |\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^q d\mu(t) + \hat{\lambda}_1 \left(\int_{T_0} u^p(t) d\mu(t) - \delta^p \right) \\ & \quad + \hat{\lambda}_2 \left(\int_T |\varphi(t)|^q v^q(t) d\mu(t) - 1 \right) = \mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 \delta^p - \hat{\lambda}_2 \\ & \geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 \delta^p - \hat{\lambda}_2 = - \int_T |\psi(t)|^q \hat{x}^q(t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для погрешности метода $\hat{m}$ имеем оценку

$$e^q(p, q, q, \hat{m}) \leq \int_T |\psi(t)|^q \hat{x}^q(t) d\mu(t) = \frac{p}{q} \hat{\lambda}_1 \delta^p + \hat{\lambda}_2 \leq E^q(p, q, q).$$

Отсюда следует оптимальность метода (3.23) и равенство (3.22). $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда $q = p$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $1 \leq p < r < \infty$ и $\delta > 0$. Предположим, что $\hat{\lambda}_1 > 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (3.28) \quad & \left(\int_{T_0} |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \hat{\lambda}_1 \right)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(t) \right)^{1/p} \\ & = \delta \left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \hat{\lambda}_1 \chi_0(t) \right)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(t) \right)^{1/r} > 0 \end{aligned}$$

(от функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем требовать, чтобы указанные интегралы существовали). Тогда

$$(3.29) \quad E(p, p, r) = \left(\widehat{\lambda}_1 \delta^p + \frac{r}{p} \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/p},$$

где

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{p}{r} \delta^{p-r} \left(\int_{T_0} |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \right)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(t) \right)^{\frac{r-p}{p}},$$

а метод

$$(3.30) \quad \widehat{m}(y)(t) = \psi(t) \alpha(t) y(t),$$

где

$$\alpha(t) = 1 - \left(1 - \frac{\widehat{\lambda}_1 \chi_0(t)}{|\psi(t)|^p} \right)_+.$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Оценка снизу. Положим

$$\widehat{x}(t) = \left(\frac{p \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \chi_0(t) \right)_+}{r \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^r} \right)^{\frac{1}{r-p}}.$$

Из определения $\widehat{\lambda}_2$ вытекает, что

$$\int_{T_0} \widehat{x}^p(t) d\mu(t) = \delta^p.$$

Кроме того, учитывая (3.28),

$$\int_T |\varphi(t)|^r \widehat{x}^r(t) d\mu(t) = \left(\frac{p}{r \widehat{\lambda}_2} \right)^{\frac{r}{r-p}} \int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \chi_0(t) \right)_+^{\frac{r}{r-p}} d\mu(t) = 1.$$

Следовательно, функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой для экстремальной задачи (3.3). Тем самым

$$E^p(p, p, r) \geq \int_T |\psi(t)|^p \widehat{x}^p(t) d\mu(t).$$

В силу легко проверяемого равенства

$$(3.31) \quad |\psi(t)|^p \widehat{x}^p(t) = \widehat{\lambda}_1 \widehat{x}^p(t) \chi_0(t) + \frac{r}{p} \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^r \widehat{x}^r(t)$$

имеем

$$E^p(p, p, r) \geq \int_T \left(\widehat{\lambda}_1 \widehat{x}^p(t) \chi_0(t) + \frac{r}{p} \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^r \widehat{x}^r(t) \right) d\mu(t) = \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \frac{r}{p} \widehat{\lambda}_2.$$

2. Оценка сверху. Будем использовать ту же схему доказательства, что и в теореме 3.4. Для оценки погрешности метода (3.30) надо найти значение следующей экстремальной задачи

$$(3.32) \quad \int_{T_0} |\psi(t)|^p |x(t) - \alpha(t) y(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t) x(t)|^p d\mu(t) \rightarrow \max,$$

$$\int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t) x(t)|^r d\mu(t) \leq 1.$$

Задача (3.32), положив $z(\cdot) = x(\cdot) - y(\cdot)$, переписывается в виде

$$(3.33) \quad \int_{T_0} |\psi(t)|^p |(1 - \alpha(t))x(t) + \alpha(t)z(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_{T_0} |z(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^r |x(t)|^r d\mu(t) \leq 1.$$

Значение этой задачи очевидно совпадает со значением задачи

$$(3.34) \quad \int_T |\psi(t)|^p ((1 - \alpha(t))v(t) + \alpha(t)u(t))^p d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_{T_0} u^p(t) d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^r v^r(t) d\mu(t) \leq 1, \\ u(t), v(t) \geq 0, \text{ для почти всех } t \in T.$$

Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_T L(u(t), v(t), \lambda_1, \lambda_2) d\mu(t),$$

где

$$L(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} -|\psi(t)|^p ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^p + \lambda_1 u^p + \lambda_2 |\varphi(t)|^r v^r, & t \in T_0, \\ -|\psi(t)|^p v^p + \lambda_2 |\varphi(t)|^r v^r, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Положим $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ и

$$T_1 = \{t \in T_0 : |\psi(t)|^p > \widehat{\lambda}_1\}.$$

Тогда при $t \in T_1$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = p\widehat{\lambda}_1(u^{p-1} - ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^{p-1}).$$

Следовательно, при $t \in T_1$ и любом фиксированном $v \geq 0$ при $u \in [0, +\infty)$ функция $L(u, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ достигает минимума в точке $u = v$. Тем самым

$$\int_{T_1} L(u(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \geq \int_{T_1} L(v(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t).$$

Если $t \in T_0 \setminus T_1$, то $\alpha(t) = 1$ и $\widehat{x}(t) = 0$. Поэтому

$$\int_{T_0 \setminus T_1} L(u(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \geq 0 = \int_{T_0 \setminus T_1} L(\widehat{x}(t), \widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t).$$

Используя равенство (3.31), несложно показать, что при $t \in T_1$

$$L(v, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq L(\widehat{x}(t), \widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &= \int_{T_1} L(u(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &+ \int_{T_0 \setminus T_1} L(u(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} L(u(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &\geq \int_{T_0} L(\widehat{x}(t), \widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} L(u(t), v(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t). \end{aligned}$$

В силу равенства (3.31) при $t \in T \setminus T_0$

$$L(u, v, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq L(\hat{x}(t), \hat{x}(t), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2).$$

Следовательно, для всех $u(t), v(t) \geq 0$

$$\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2).$$

Для любых функций $u(\cdot), v(\cdot)$, допустимых в задаче (3.34) имеем

$$\begin{aligned} & - \int_T |\psi(t)|^p ((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^p d\mu(t) \\ & \geq - \int_T |\psi(t)|^p ((1 - \alpha(t))u(t) + \alpha(t)v(t))^p d\mu(t) + \hat{\lambda}_1 \left(\int_{T_0} u^p(t) d\mu(t) - \delta^p \right) \\ & \quad + \hat{\lambda}_2 \left(\int_T |\varphi(t)|^r v^r(t) d\mu(t) - 1 \right) = \mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 \delta^p - \hat{\lambda}_2 \\ & \geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 \delta^p - \hat{\lambda}_2 = - \int_T |\psi(t)|^p \hat{x}^p(t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для погрешности метода $\hat{m}$ имеем оценку

$$e^p(p, p, r, \hat{m}) \leq \int_T |\psi(t)|^p \hat{x}^p(t) d\mu(t) = \hat{\lambda}_1 \delta^p + \frac{r}{p} \hat{\lambda}_2 \leq E^p(p, p, r).$$

Отсюда следует оптимальность метода (3.30) и равенство (3.29). $\square$

Во всех рассмотренных случаях получались соотношения

$$\begin{aligned} E^q(p, q, r) & \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}^q \geq \int_T |\psi(t)|^q \hat{x}^q(t) d\mu(t) \\ & \geq e^q(p, q, r, \hat{m}) \geq E^q(p, q, r). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всех рассмотренных случаев имеет место равенство

$$(3.35) \quad E(p, q, r) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

3.3. Оптимальное восстановление для однородных весов

Пусть T — конус, $T_0 = T$, а $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков η и ν , соответственно. Будем предполагать, что $\varphi(t) \neq 0$ и $\psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$, а $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка d . Пусть $1 \leq p < q, r < \infty$. Для $k \in [0, 1)$ функция $k^{\frac{1}{p-q}}(1-k)^{-\frac{1}{r-q}}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно, для всех $z \in T$ таких, что $\varphi(z) \neq 0$ и $\psi(z) \neq 0$ (если $p < r$), существует число $k(z)$ такое, что

$$(3.36) \quad \frac{k^{\frac{1}{p-q}}(z)}{(1-k(z))^{\frac{1}{r-q}}} = \frac{|\psi(z)|^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}}{|\varphi(z)|^{\frac{r}{r-q}}}.$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $1 \leq q < p, r < \infty$, $\varphi(t), \psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $\nu + d(1/r - 1/p) \neq 0$. Предположим, что

$$(3.37) \quad \begin{aligned} I_1 &= \int_T |\psi(z)|^{\frac{qp}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(z) d\mu(z) < \infty, \\ I_2 &= \int_T |\psi(z)|^{\frac{qr}{p-q}} |\varphi(z)|^r k^{\frac{r}{p-q}}(z) d\mu(z) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда

$$(3.38) \quad E(p, q, r) = \delta^\gamma I_1^{-\gamma/p} I_2^{-(1-\gamma)/r} (I_1 + I_2)^{1/q},$$

где

$$(3.39) \quad \gamma = \frac{\nu - \eta - d(1/q - 1/r)}{\nu + d(1/r - 1/p)},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = k(\xi t)\psi(t)y(t),$$

в котором

$$\xi = \left(\delta I_1^{-1/p} I_2^{1/r} \right)^{\frac{1}{\nu + d(1/r - 1/p)}},$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\widehat{x}(t) = \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{1}{p-q}} k^{\frac{1}{p-q}}(\xi t),$$

где $\lambda_1 > 0$ определим ниже. Покажем, что $\widehat{x}(\cdot)$ удовлетворяет равенству (3.13), в котором

$$\lambda_2 = r^{-1} q^{\frac{p-r}{p-q}} (p\lambda_1)^{\frac{r-q}{p-q}} \xi^{\nu r - \eta \frac{q(p-r)}{p-q}}.$$

Имеем

$$p\lambda_1 \widehat{x}^{p-q}(t) = q|\psi(t)|^q k(\xi t).$$

Далее,

$$r\lambda_2 |\varphi(t)|^r \widehat{x}^{r-q}(t) = r\lambda_2 |\varphi(t)|^r \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{r-q}{p-q}} k^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t).$$

Так как $|\varphi(\cdot)|$ и $|\psi(\cdot)|$ однородные функции, то в силу равенства (3.36) получаем

$$k^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t) = \frac{|\psi(\xi t)|^{\frac{q(p-r)}{p-q}}}{|\varphi(\xi t)|^r} (1 - k(\xi t)) = \xi^{\eta \frac{q(p-r)}{p-q} - \nu r} \frac{|\psi(t)|^{\frac{q(p-r)}{p-q}}}{|\varphi(t)|^r} (1 - k(\xi t)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} r\lambda_2 |\varphi(t)|^r \widehat{x}^{r-q}(t) &= r\lambda_2 \left(\frac{q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{r-q}{p-q}} \xi^{\eta \frac{q(p-r)}{p-q} - \nu r} |\psi(t)|^q (1 - k(\xi t)) \\ &= q|\psi(t)|^q (1 - k(\xi t)) = q|\psi(t)|^q - p\lambda_1 \widehat{x}^{p-q}(t). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что при

$$\lambda_1 = \frac{q}{p} I_1^{\frac{p-q}{p}} \xi^{-\eta q - d \frac{p-q}{p}} \delta^{q-p},$$

выполняются равенства

$$\int_T \widehat{x}^p(t) d\mu(t) = \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^r \widehat{x}^r(t) d\mu(t) = 1.$$

В силу определения $\widehat{x}(\cdot)$ надо проверить, что

$$\begin{aligned} \int_T \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{p}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(\xi t) d\mu(t) &= \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)|^r \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{r}{p-q}} k^{\frac{r}{p-q}}(\xi t) d\mu(t) &= 1. \end{aligned}$$

Сделав замену $z = \xi t$ и учитывая однородность функций $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$, а также меры $\mu(\cdot)$, получаем, что достаточно проверить равенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{p}{p-q}} I_1 &= \delta^p \xi^{\frac{\eta q p}{p-q} + d}, \\ \left(\frac{q}{p\lambda_1} \right)^{\frac{r}{p-q}} I_2 &= \xi^{\frac{\eta q r}{p-q} + \nu r + d}. \end{aligned}$$

Справедливость этих равенств непосредственно вытекает из определений λ_1 и ξ .

Из теоремы 3.2 следует, что

$$E(p, q, r) = \left(\frac{p\lambda_1\delta^p + r\lambda_2}{q} \right)^{1/q}.$$

Подставляя в это выражение равенства для λ_1 , λ_2 и ξ , получаем (3.38). Из той же теоремы вытекает, что метод

$$\widehat{m}(y)(t) = q^{-1}p\lambda_1\widehat{x}^{p-q}(t)|\psi(t)|^{-q}\psi(t)y(t) = k(\xi t)\psi(t)y(t)$$

является оптимальным. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть $1 \leq q < p < \infty$, $\varphi(t), \psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $\nu \neq 0$. Предположим, что

$$I_1 = \int_T \frac{|\psi(z)|^{\frac{qp}{p-q}}}{(1 + |\varphi(z)|^p)^{\frac{p}{p-q}}} d\mu(z) < \infty,$$

$$I_2 = \int_T \frac{|\psi(z)|^{\frac{qp}{p-q}} |\varphi(z)|^p}{(1 + |\varphi(z)|^p)^{\frac{p}{p-q}}} d\mu(z) < \infty.$$

Тогда

$$E(p, q, p) = \delta^\gamma I_1^{-\gamma/p} I_2^{-(1-\gamma)/p} (I_1 + I_2)^{1/q},$$

где

$$\gamma = \frac{\nu - \eta - d(1/q - 1/p)}{\nu},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{\psi(t)y(t)}{1 + |\varphi(\xi t)|^p},$$

в котором

$$\xi = \delta^{1/\nu} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^{\frac{1}{\nu p}},$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r = p$ функция $k(\cdot)$ определена равенством

$$k(z) = \frac{1}{1 + |\varphi(z)|^p}.$$

Поэтому

$$I_1 = \int_T \frac{|\psi(z)|^{\frac{qp}{p-q}}}{(1 + |\varphi(z)|^p)^{\frac{p}{p-q}}} d\mu(z),$$

$$I_2 = \int_T \frac{|\psi(z)|^{\frac{qp}{p-q}} |\varphi(z)|^p}{(1 + |\varphi(z)|^p)^{\frac{p}{p-q}}} d\mu(z).$$

Остается применить теорему 3.6. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $r = q$.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $1 \leq q < p < \infty$, $\nu + d(1/q - 1/p) \neq 0$ и

$$(3.40) \quad I_1 = \int_T (|\psi(\xi)|^q - |\varphi(\xi)|^q)_+^{\frac{p}{p-q}} d\mu(\xi) < \infty,$$

$$I_2 = \int_T |\varphi(\xi)|^q (|\psi(\xi)|^q - |\varphi(\xi)|^q)_+^{\frac{q}{p-q}} d\mu(\xi) < \infty.$$

Тогда

$$E(p, q, q) = I_1^{-\frac{1}{p} \frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/q - 1/p)}} I_2^{-\frac{1}{q} \frac{\eta + d(1/q - 1/p)}{\nu + d(1/q - 1/p)}} (I_1 + I_2)^{1/q} \delta^{\frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/q - 1/p)}},$$

а метод

$$(3.41) \quad \widehat{m}(y)(t) = \left(1 - \left(\delta \frac{I_2^{1/q}}{I_1^{1/p}} \right)^{\frac{(\nu-\eta)q}{\nu+d(1/q-1/p)}} \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q} \right) \psi(t)y(t) +$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 3.4. Будем искать решение уравнения (3.21) в виде $\widehat{\lambda}_2 = a^{(\eta-\nu)q}$, $a > 0$. Сделав замену переменной $t = a\xi$, получим уравнение

$$a^{\frac{\eta q}{p-q} + \frac{d}{p}} I_1^{1/p} = \delta a^{\nu + \frac{\eta q}{p-q} + \frac{d}{q}} I_2^{1/q}.$$

Отсюда

$$a = \left(\frac{I_1^{1/p}}{\delta I_2^{1/q}} \right)^{\frac{1}{\nu+d(1/q-1/p)}}.$$

После такой же замены имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{q}{p} \delta^{q-p} a^{q(\eta+d(1/q-1/p))} I_1^{\frac{p-q}{p}}.$$

Остается подставить полученные величины в выражения для погрешности оптимального восстановления и для оптимального метода, полученные в теореме 3.4. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $q = p$.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $1 \leq p < r < \infty$, $\nu + d(1/r - 1/p) \neq 0$ и

$$(3.42) \quad \begin{aligned} I_1 &= \int_T |\varphi(\xi)|^{\frac{pr}{p-r}} (|\psi(\xi)|^p - 1)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(\xi) < \infty, \\ I_2 &= \int_T |\varphi(\xi)|^{\frac{pr}{p-r}} (|\psi(\xi)|^p - 1)_+^{\frac{r}{r-p}} d\mu(\xi) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда

$$E(p, p, r) = I_1^{-\frac{1}{p} \frac{\nu-\eta-d(1/p-1/r)}{\nu-d(1/p-1/r)}} I_2^{-\frac{1}{r} \frac{\eta}{\nu-d(1/p-1/r)}} (I_1 + I_2)^{1/p} \delta^{\frac{\nu-\eta-d(1/p-1/r)}{\nu-d(1/p-1/r)}},$$

а метод

$$(3.43) \quad \widehat{m}(y)(t) = \min \left\{ 1, \left(\frac{I_1^{1/p}}{\delta I_2^{1/r}} \right)^{\frac{\eta p}{\nu-d(1/p-1/r)}} \frac{1}{|\psi(t)|^p} \right\} \psi(t)y(t)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 3.5. Будем искать решение уравнения (3.28) в виде $\widehat{\lambda}_1 = a^{\eta p}$, $a > 0$. Сделав замену переменной $t = a\xi$, получим уравнение

$$a^{\frac{\nu r}{p-r} + \frac{d}{p}} I_1^{1/p} = \delta a^{\frac{\nu p}{p-r} + \frac{d}{r}} I_2^{1/r}.$$

Отсюда

$$a = \left(\frac{I_1^{1/p}}{\delta I_2^{1/r}} \right)^{\frac{1}{\nu+d(1/r-1/p)}}.$$

После такой же замены имеем

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{p}{r} \delta^{p-r} a^{r(-\nu+\eta p/r+d(1/p-1/r))} I_1^{\frac{r-p}{p}}.$$

Остается подставить полученные величины в выражения для погрешности оптимального восстановления и для оптимального метода, полученные в теореме 3.5. $\square$

3.4. Точные неравенства

Будем по-прежнему считать, что T — конус, а $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков η и ν , соответственно. Вновь предполагаем, что $\varphi(t) \neq 0$ и $\psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$, а $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка d .

Неравенство

$$(3.44) \quad \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\alpha \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^\beta$$

будем называть *точным*, если не существует константы, меньшей, чем C , для которой выполнялось бы это неравенство. При этом считается, что $x(\cdot) \in \mathcal{W}$, т.е. $x(\cdot) \in L_p(T, \mu)$ и $\varphi(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T, \mu)$.

ТЕОРЕМА 3.10. *Если*

$$\sup_{\substack{\|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leq 1 \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta}} \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} = C\delta^\alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1)$, то имеет место точное неравенство (3.44), в котором $\beta = 1 - \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x(\cdot) = 0$ почти всюду, то неравенство (3.44) очевидно выполнено. В противном случае $\|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} = a \neq 0$. Рассмотрим функцию $x_0(\cdot) = x(\cdot)/a$. Положим $\delta = \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}$. Тогда $\|\varphi(\cdot)x_0(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} = 1$. Следовательно,

$$\|\psi(\cdot)x_0(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\alpha.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\alpha \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\alpha}.$$

Если предположить, что существует константа $C_1 < C$, для которой это неравенство также справедливо, то

$$\sup_{\substack{\|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leq 1 \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta}} \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C_1\delta^\alpha < C\delta^\alpha,$$

что противоречит исходному предположению. $\square$

Положим

$$P = \{(p, q, r) : 1 \leq q < p, r < \infty\}, \quad P_1 = \{(p, q, r) : 1 \leq q = r < p < \infty\}, \\ P_2 = \{(p, q, r) : 1 \leq q = p < r < \infty\}, \quad \mathcal{P} = P \cup P_1 \cup P_2.$$

Из теоремы 3.10, равенства (3.35) и теорем 3.6, 3.8, 3.9 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.11. *Пусть $(p, q, r) \in \mathcal{P}$, $\varphi(t), \psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $\eta > d(1/p - 1/q)$, $\nu > \eta + d(1/q - 1/r)$. Предположим, что $I_1, I_2 < \infty$, где I_1, I_2 определены равенствами (3.37) при $(p, q, r) \in P$, равенствами (3.40) при $(p, q, r) \in P_1$ и равенствами (3.42) при $(p, q, r) \in P_2$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$(3.45) \quad \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\gamma \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\gamma},$$

где

$$C = I_1^{-\gamma/p} I_2^{-(1-\gamma)/r} (I_1 + I_2)^{1/q},$$

а γ определено формулой (3.39).

Пусть $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$ и $|w_1(\cdot)|$ — однородные функции порядков θ , θ_0 и θ_1 , определенные на конусе T . Предположим, что $w(t), w_0(t), w_1(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $1 \leq q < p, r < \infty$. Тогда для почти всех $t \in T$ таких, что $w(t), w_0(t), w_1(t) \neq 0$ определена функция $\tilde{k}(z)$, удовлетворяющая равенству

$$\frac{\tilde{k}^{\frac{1}{p-q}}(t)}{(1 - \tilde{k}(t))^{\frac{1}{r-q}}} = \left| \frac{w(t)}{w_1(t)} \right|^{\frac{r}{r-q}} \left| \frac{w_0(t)}{w(t)} \right|^{\frac{p}{p-q}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_T \left| \frac{w(t)}{w_0(t)} \right|^{\frac{qp}{p-q}} \tilde{k}^{\frac{p}{p-q}}(t) d\mu(t), \\ \tilde{I}_2 &= \int_T \frac{|w(t)|^{\frac{qr}{p-q}}}{|w_0(t)|^{\frac{pr}{p-q}}} |w_1(t)|^r \tilde{k}^{\frac{r}{p-q}}(t) d\mu(t). \end{aligned}$$

При $1 \leq q = r < p < \infty$ положим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_T \frac{1}{|w_0(t)|^{\frac{qp}{p-q}}} (|w(t)|^q - |w_1(t)|^q)_+^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t), \\ \tilde{I}_2 &= \int_T \frac{|w_1(t)|^q}{|w_0(t)|^{\frac{qp}{p-q}}} (|w(t)|^q - |w_1(t)|^q)_+^{\frac{q}{p-q}} d\mu(t). \end{aligned}$$

При $1 \leq q = p < r < \infty$ положим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_T \frac{|w_0(t)|^p}{|w_1(t)|^{\frac{pr}{r-p}}} (|w(t)|^p - |w_0(t)|^p)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(t), \\ \tilde{I}_2 &= \int_T \frac{1}{|w_1(t)|^{\frac{pr}{r-p}}} (|w(t)|^p - |w_0(t)|^p)_+^{\frac{r}{r-p}} d\mu(t). \end{aligned}$$

Введем также следующие обозначения

$$\tilde{\theta} = \theta + d/q, \quad \tilde{\theta}_0 = \theta_0 + d/p, \quad \tilde{\theta}_1 = \theta_1 + d/r.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Пусть $(p, q, r) \in \mathcal{P}$, $w(t), w_0(t), w_1(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $\tilde{\theta} > \tilde{\theta}_0$, $\tilde{\theta}_1 > \tilde{\theta}$. Если $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2 < \infty$, то для всех $x(\cdot)$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T, \mu)$ и $w_1(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T, \mu)$, имеет место точное неравенство

$$(3.46) \quad \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq \tilde{C} \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^{\tilde{\gamma}} \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)}^{1-\tilde{\gamma}},$$

где

$$\tilde{C} = \tilde{I}_1^{-\tilde{\gamma}/p} \tilde{I}_2^{-(1-\tilde{\gamma})/r} (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2)^{1/q}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\psi(x) = \frac{w(x)}{w_0(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{w_1(x)}{w_0(x)}.$$

Тогда $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков $\eta = \theta - \theta_0$ и $\nu = \theta_1 - \theta_0$. Из (3.45) следует, что для всех $y(\cdot) \in \mathcal{W}$ имеет место точное неравенство

$$\|\psi(\cdot)y(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq \tilde{C} \|y(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^{\tilde{\gamma}} \|\varphi(\cdot)y(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)}^{1-\tilde{\gamma}}.$$

Подставляя $y(\cdot) = w_0(\cdot)x(\cdot)$, получаем (3.46). $\square$

3.5. Оптимальное восстановление для однородных весов в $\mathbb{R}^d$

Пусть T — конус в $\mathbb{R}^d$, $d\mu(t) = dt$, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков η и ν , $\varphi(t) \neq 0$ и $\psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$. Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned} t_1 &= \rho \cos \omega_1, \\ t_2 &= \rho \sin \omega_1 \cos \omega_2, \\ &\dots\dots\dots \\ t_{d-1} &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}, \\ t_d &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Положим $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$,

$$(3.47) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}(\omega) &= \rho^{-\eta} |\psi(\rho \cos \omega_1, \dots, \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|, \\ \tilde{\varphi}(\omega) &= \rho^{-\nu} |\varphi(\rho \cos \omega_1, \dots, \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|. \end{aligned}$$

Обозначим через Ω область изменения ω , когда $t \in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ . Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2} \omega_1 \sin^{d-3} \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2}.$$

Доопределим функцию $k(\cdot)$, определенную при $(p, q, r) \in P$ равенством (3.36), равенством

$$k(t) = \left(1 - \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+$$

при $(p, q, r) \in P_1$, а при $(p, q, r) \in P_2$ равенством

$$k(t) = \min \{1, |\psi(t)|^{-p}\}.$$

Если γ , определенное формулой (3.39), лежит в интервале $(0, 1)$, положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Несложно убедиться, что в этом случае $q^* \in (0, 1)$ при всех $(p, q, r) \in \mathcal{P}$. Кроме того, имеет место равенство

$$q^* = \frac{pqr(\nu + d(1/r - 1/p))}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)}.$$

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть $(p, q, r) \in \mathcal{P}$, $\eta > d(1/p - 1/q)$ и $\nu > \eta + d(1/q - 1/r)$. Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \frac{\tilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{q^*(1-\gamma)}(\omega)} J(\omega) d\omega < \infty.$$

Тогда

$$(3.48) \quad E(p, q, r) = C\delta^\gamma,$$

где

$$(3.49) \quad C = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}} (1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B(q^*\gamma/p + 1, q^*(1-\gamma)/r) I}{r(\nu - \eta - d(1/q - 1/r))} \right)^{1/q^*},$$

а $B(\cdot, \cdot)$ — B -функция Эйлера. Кроме того, метод

$$(3.50) \quad \hat{m}(y)(t) = k \left(\xi_1^{\frac{1}{\nu + d(1/r - 1/p)}} t \right) \psi(t) y(t),$$

где

$$\xi_1 = \delta \left(\gamma^{q-r} (1-\gamma)^{p-q} C^{(p-r)q} \right)^{\frac{q^*}{pqr}}$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что $\gamma \in (0, 1)$, если $\eta > d(1/p - 1/q)$ и $\nu > \eta + d(1/q - 1/r)$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $(p, q, r) \in P$. В силу однородности имеем

$$(3.51) \quad \frac{k^{\frac{1}{p-q}}(\rho, \omega)}{(1 - k(\rho, \omega))^{\frac{1}{r-q}}} = \rho^{\frac{\eta q(p-r) - \nu r(p-q)}{(p-q)(r-q)}} \frac{\tilde{\psi}^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{\frac{r}{r-q}}(\omega)}.$$

Вычислим величину I_1 из теоремы 3.6. Переходя к сферической системе координат, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T |\psi(z)|^{\frac{qp}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(z) dz \\ &= \int_{\Omega} \tilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\eta qp}{p-q} + d - 1} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho, \omega) d\rho. \end{aligned}$$

Из (3.51) имеем

$$\rho^{\nu r(p-q) - \eta q(p-r)} = \frac{(1 - k(\rho, \omega))^{p-q} \tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{k^{r-q}(\rho, \omega) \tilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)}.$$

Поэтому

$$\rho^{\frac{\eta qp}{p-q} + d} = \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}} \left(\frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta},$$

где

$$\zeta = \frac{\eta qp + d(p - q)}{(p - q)(\nu r(p - q) - \eta q(p - r))} = \frac{q^*(1 - \gamma)}{r(p - q)}.$$

Из этого равенства вытекает, что $\nu r(p - q) - \eta q(p - r) > 0$. При фиксированном ω

$$\begin{aligned} d\rho^{\frac{\eta qp}{p-q} + d} &= \left(\frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta} d \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}} \\ &= -\zeta \left(\frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta} \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta - 1}}{k^{(r-q)\zeta + 1}} (r - q + (p - r)k) dk, \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\eta qp}{p-q} + d - 1} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho, \omega) d\rho &= \frac{p - q}{\eta qp + d(p - q)} \int_0^{+\infty} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho, \omega) d\rho^{\frac{\eta qp}{p-q} + d} \\ &= \frac{1}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)} \left(\frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta} \int_0^1 k^{\hat{p}} (1 - k)^{\hat{q} - 1} (r - q + (p - r)k) dk, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{p}{p - q} - (r - q)\zeta - 1 = \frac{qr(\nu - \eta) - d(r - q)}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)} = q^* \frac{\gamma}{p}, \\ \hat{q} &= (p - q)\zeta = \frac{\eta qp + d(p - q)}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)} = q^* \frac{1 - \gamma}{r}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{(K_1 + K_2)I}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)},$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= (r - q) \int_0^1 k^{\widehat{p}}(1 - k)^{\widehat{q}-1} dk = (r - q)B(\widehat{p} + 1, \widehat{q}), \\ K_2 &= (p - r) \int_0^1 k^{\widehat{p}+1}(1 - k)^{\widehat{q}-1} dk = (p - r)B(\widehat{p} + 2, \widehat{q}) \\ &= (p - r) \frac{\widehat{p} + 1}{\widehat{p} + \widehat{q} + 1} B(\widehat{p} + 1, \widehat{q}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{pq}{q^*(\nu r(p - q) - \eta q(p - r))} B(\widehat{p} + 1, \widehat{q})I = \frac{B(\widehat{p} + 1, \widehat{q})I}{r(\nu + d(1/r - 1/p))}.$$

Для I_2 имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_T |\psi(z)|^{\frac{qr}{p-q}} |\varphi(z)|^r k^{\frac{r}{p-q}}(z) d\mu(z) \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{\psi}^{\frac{qr}{p-q}}(\omega) \widetilde{\varphi}^r(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\eta qr}{p-q} + \nu r + d - 1} k^{\frac{r}{p-q}}(\rho, \omega) d\rho. \end{aligned}$$

При фиксированном ω

$$\begin{aligned} d\rho^{\frac{\eta qr}{p-q} + \nu r + d} &= \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta_1} d \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta_1}}{k^{(r-q)\zeta_1}} \\ &= -\zeta_1 \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta_1} \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta_1 - 1}}{k^{(r-q)\zeta_1 + 1}} (r - q + (p - r)k) dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{\eta qr + (\nu r + d)(p - q)}{(p - q)(\nu r(p - q) - \eta q(p - r))} = \frac{q^*(1 - \gamma)}{r(p - q)} + \frac{1}{p - q}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\eta qr}{p-q} + \nu r + d - 1} k^{\frac{r}{p-q}}(\rho, \omega) d\rho \\ &= \frac{p - q}{\eta qr + (\nu r + d)(p - q)} \int_0^{+\infty} k^{\frac{r}{p-q}}(\rho, \omega) d\rho^{\frac{\eta qr}{p-q} + \nu r + d} \\ &= \frac{1}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)} \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{r(p-q)}(\omega)} \right)^{\zeta_1} (L_1 + L_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= (r - q) \int_0^1 k^{\widehat{p}-1}(1 - k)^{\widehat{q}} dk = (r - q)B(\widehat{p}, \widehat{q} + 1) = (r - q) \frac{\widehat{q}}{\widehat{p}} B(\widehat{p} + 1, \widehat{q}), \\ L_2 &= (p - r) \int_0^1 k^{\widehat{p}}(1 - k)^{\widehat{q}} dk = (p - r)B(\widehat{p} + 1, \widehat{q} + 1) \\ &= (p - r) \frac{\widehat{q}}{\widehat{p} + \widehat{q} + 1} B(\widehat{p} + 1, \widehat{q}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_2 = \frac{(L_1 + L_2)I}{\nu r(p - q) - \eta q(p - r)}.$$

Отсюда

$$I_2 = \frac{(1 - \gamma)pq}{\gamma q^*(\nu r(p - q) - \eta q(p - r))} B(\widehat{p} + 1, \widehat{q})I = \frac{(1 - \gamma)B(\widehat{p} + 1, \widehat{q})I}{\gamma r(\nu + d(1/r - 1/p))}.$$

Теперь равенство (3.48) вытекает из (3.38).

В теореме 3.6 доказано, что метод

$$\widehat{m}(y)(t) = k(\xi t)\psi(t)y(t),$$

в котором

$$\xi = \left(\delta I_1^{-1/p} I_2^{1/r} \right)^{\frac{1}{\nu+d(1/r-1/p)}}.$$

Подставив полученные выражения для I_1 и I_2 , получим оптимальность метода (3.50).

2. Пусть $(p, q, r) \in P_1$, т.е. $1 \leq q = r < p < \infty$. Воспользуемся теоремой 3.8. Перейдем в интеграле I_1 к сферической системе координат

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \rho^{d-1} d\rho \int_{\Omega} (\rho^{\eta q} \widetilde{\psi}^q(\omega) - \rho^{\nu q} \widetilde{\varphi}^q(\omega))_+^{\frac{p}{p-q}} J(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\eta qp}{p-q} + d - 1} \left(1 - \rho^{(\nu-\eta)q} \frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)} \right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\rho. \end{aligned}$$

Зафиксируем ω и сделаем во втором интеграле замену

$$(3.52) \quad t = \rho^{(\nu-\eta)q} \frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(\nu-\eta)q} \int_{\Omega} \widetilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega) \left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\widetilde{\varphi}(\omega)} \right)^{\frac{\eta qp}{(p-q)(\nu-\eta)} + \frac{d}{\nu-\eta}} J(\omega) d\omega \\ &\times \int_0^1 t^{\frac{\eta p}{(p-q)(\nu-\eta)} + \frac{d}{(\nu-\eta)q} - 1} (1-t)^{\frac{p}{p-q}} dt = \frac{I}{(\nu-\eta)q} B(q^* \gamma / p + 2, q^*(1-\gamma)/q). \end{aligned}$$

Проведем аналогичные вычисления для I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \rho^{\nu q + d - 1} d\rho \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}^q(\omega) (\rho^{\eta q} \widetilde{\psi}^q(\omega) - \rho^{\nu q} \widetilde{\varphi}^q(\omega))_+^{\frac{q}{p-q}} J(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}^q(\omega) \widetilde{\psi}^{\frac{q^2}{p-q}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\nu q + \frac{\eta q^2}{p-q} + d - 1} \left(1 - \rho^{(\nu-\eta)q} \frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)} \right)_+^{\frac{q}{p-q}} d\rho. \end{aligned}$$

Сделав ту же замену (3.52), получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{(\nu-\eta)q} \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}^q(\omega) \widetilde{\psi}^{\frac{q^2}{p-q}}(\omega) \left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\widetilde{\varphi}(\omega)} \right)^{\frac{\nu q}{\nu-\eta} + \frac{\eta q^2}{(p-q)(\nu-\eta)} + \frac{d}{\nu-\eta}} J(\omega) d\omega \\ &\times \int_0^1 t^{\frac{\nu}{\nu-\eta} + \frac{\eta p}{(p-q)(\nu-\eta)} + \frac{d}{(\nu-\eta)q} - 1} (1-t)^{\frac{q}{p-q}} dt \\ &= \frac{I}{(\nu-\eta)q} B(q^* \gamma / p + 1, q^*(1-\gamma)/q + 1). \end{aligned}$$

Пользуясь свойствами B -функции, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{q^* \gamma / p + 1}{q(\nu-\eta)(q^* \gamma / p + 1 + q^*(1-\gamma)/q)} B(q^* \gamma / p + 1, q^*(1-\gamma)/r) I, \\ I_2 &= \frac{q^*(1-\gamma)/q}{q(\nu-\eta)(q^* \gamma / p + 1 + q^*(1-\gamma)/q)} B(q^* \gamma / p + 1, q^*(1-\gamma)/r) I. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае (когда $r = q$)

$$\frac{1}{q^*} = \gamma \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right), \quad \gamma = \frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/q - 1/p)}.$$

Поэтому $q^*\gamma/p + 1 = q^*\gamma/q$. Отсюда

$$I_1 = \gamma \frac{B(q^*\gamma/p + 1, q^*(1 - \gamma)/r) I}{q(\nu - \eta)}, \quad I_2 = (1 - \gamma) \frac{B(q^*\gamma/p + 1, q^*(1 - \gamma)/r) I}{q(\nu - \eta)}.$$

Из теоремы 3.8 получаем

$$\begin{aligned} E(p, q, q) &= I_1^{-\frac{\gamma}{p}} I_2^{-\frac{1-\gamma}{q}} (I_1 + I_2)^{1/q} \delta^\gamma \\ &= \gamma^{-\frac{\gamma}{p}} (1 - \gamma)^{-\frac{1-\gamma}{q}} \left(\frac{B(q^*\gamma/p + 1, q^*(1 - \gamma)/r) I}{q(\nu - \eta)} \right)^{\gamma(1/q - 1/p)} \delta^\gamma = C \delta^\gamma. \end{aligned}$$

Метод (3.41) может быть записан в виде

$$\hat{m}(y)(t) = k \left(b^{\frac{1}{\nu + d(1/r - 1/p)}} t \right) \psi(t) y(t),$$

где

$$\begin{aligned} b &= \delta \frac{I_2^{1/q}}{I_1^{1/p}} = \delta \gamma^{-\frac{1}{p}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{B(q^*\gamma/p + 1, q^*(1 - \gamma)/r) I}{q(\nu - \eta)} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &= \delta \gamma^{-\frac{1}{p}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{\gamma}} \gamma^{\frac{1}{p}} (1 - \gamma)^{\frac{1-\gamma}{q\gamma}} = \delta (1 - \gamma)^{\frac{1}{q\gamma}} C^{\frac{1}{\gamma}} = \delta ((1 - \gamma) C^q)^{\frac{1}{q\gamma}} \\ &= \delta ((1 - \gamma) C^q)^{\frac{q^*}{q} (\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} = \delta ((1 - \gamma) C^q)^{\frac{q^*(p-q)}{pq^2}} = \xi_1. \end{aligned}$$

3. Пусть $(p, q, r) \in P_2$, т.е. $1 \leq q = p < r < \infty$. Воспользуемся теоремой 3.9. Перейдем в интеграле I_1 к сферической системе координат

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \rho^{d-1} d\rho \int_{\Omega} \rho^{\frac{\nu pr}{p-r}} \tilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega) \left(\rho^{np} \tilde{\psi}^p(\omega) - 1 \right)_+^{\frac{p}{r-p}} J(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \tilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\nu pr}{p-r} + d-1} \left(\rho^{np} \tilde{\psi}^p(\omega) - 1 \right)_+^{\frac{p}{r-p}} d\rho. \end{aligned}$$

Зафиксируем ω и сделаем во втором интеграле замену

$$(3.53) \quad t = \rho^{np} \tilde{\psi}^p(\omega).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\eta p} \int_{\Omega} \tilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega) \tilde{\psi}^{-\frac{\nu pr}{(p-r)\eta} - \frac{d}{\eta}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_1^{+\infty} t^{\frac{\nu r}{(p-r)\eta} + \frac{d}{\eta p} - 1} (t - 1)^{\frac{p}{r-p}} dt \\ &= \frac{I}{\eta p} \int_0^1 s^{\frac{\nu r}{(r-p)\eta} - \frac{p}{r-p} - \frac{d}{\eta p} - 1} (1 - s)^{\frac{p}{r-p}} ds = \frac{I}{\eta p} B(q^*\gamma/p + 1, q^*(1 - \gamma)/r + 1). \end{aligned}$$

Проведем аналогичные вычисления для I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \rho^{d-1} d\rho \int_{\Omega} \rho^{\frac{\nu pr}{p-r}} \tilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega) \left(\rho^{np} \tilde{\psi}^p(\omega) - 1 \right)_+^{\frac{r}{r-p}} J(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \tilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{\nu pr}{p-r} + d-1} \left(\rho^{np} \tilde{\psi}^p(\omega) - 1 \right)_+^{\frac{r}{r-p}} d\rho. \end{aligned}$$

Сделав ту же замену (3.53), получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\eta p} \int_{\Omega} \tilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega) \tilde{\psi}^{-\frac{\nu pr}{(p-r)\eta} - \frac{d}{\eta}}(\omega) J(\omega) d\omega \int_1^{+\infty} t^{\frac{\nu r}{(p-r)\eta} + \frac{d}{\eta p} - 1} (t-1)^{\frac{r}{r-p}} dt \\ &= \frac{I}{\eta p} \int_0^1 s^{\frac{\nu r}{(r-p)\eta} - \frac{r}{r-p} - \frac{d}{\eta p} - 1} (1-s)^{\frac{r}{r-p}} ds = \frac{I}{\eta p} B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+2). \end{aligned}$$

Пользуясь свойствами B -функции, будем иметь

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{q^* \gamma/p}{\eta p(q^* \gamma/p + q^*(1-\gamma)/r+1)} B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) I, \\ I_2 &= \frac{q^*(1-\gamma)/r+1}{\eta p(q^* \gamma/p + q^*(1-\gamma)/r+1)} B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) I. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае (когда $q = p$)

$$\frac{1}{q^*} = (1-\gamma) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right), \quad \gamma = \frac{\nu - \eta - d(1/p - 1/r)}{\nu - d(1/p - 1/r)}.$$

Поэтому $q^*(1-\gamma)/r+1 = q^*(1-\gamma)/p$. Отсюда

$$I_1 = \gamma \frac{B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) I}{\eta p}, \quad I_2 = (1-\gamma) \frac{B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) I}{\eta p}.$$

Из теоремы 3.9 получаем

$$\begin{aligned} E(p, p, r) &= I_1^{-\frac{\gamma}{p}} I_2^{-\frac{1-\gamma}{r}} (I_1 + I_2)^{1/p} \delta^\gamma \\ &= \gamma^{-\frac{\gamma}{p}} (1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) I}{\eta p} \right)^{(1-\gamma)(1/p-1/r)} \delta^\gamma. \end{aligned}$$

Из свойств B -функции вытекает, что

$$\begin{aligned} B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) &= \frac{q^*(1-\gamma)/r}{q^* \gamma/p} B(q^* \gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/r) \\ &= \frac{\eta p B(q^* \gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/r)}{r(\nu - \eta - d(1/q - 1/r))}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(p, p, r) = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}} (1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B(q^* \gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/r) I}{r(\nu - \eta - d(1/q - 1/r))} \right)^{1/q^*} \delta^\gamma = C \delta^\gamma.$$

Метод (3.43) может быть записан в виде

$$\hat{m}(y)(t) = k \left(e^{\frac{1}{\nu - d(1/p - 1/r)}} t \right) \psi(t) y(t),$$

где

$$\begin{aligned} c &= \delta \frac{I_2^{1/r}}{I_1^{1/p}} = \delta \gamma^{-\frac{1}{p}} (1-\gamma)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r+1) I}{k p} \right)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \\ &= \delta \gamma^{-\frac{1}{p}} (1-\gamma)^{\frac{1}{r}} C^{-\frac{1}{1-\gamma}} \gamma^{-\frac{\gamma}{p(1-\gamma)}} (1-\gamma)^{-\frac{1}{r}} = \delta \gamma^{-\frac{1}{p(1-\gamma)}} C^{-\frac{1}{1-\gamma}} \\ &= \delta (\gamma C^p)^{-\frac{1}{p(1-\gamma)}} = \delta (\gamma C^p)^{(p-r)\frac{q^*}{p^2 r}} = \xi_1. \end{aligned}$$

□

3.6. Точные неравенства для однородных весов в $\mathbb{R}^d$ и обобщенные неравенства Карлсона

Из теоремы 3.11 и вычислений, проведенных для I_1, I_2 в теореме 3.13, вытекает

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть $(p, q, r) \in \mathcal{P}$, $\varphi(t), \psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $\eta > d(1/p - 1/q)$, $\nu > \eta + d(1/q - 1/r)$. Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \frac{\tilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{q^*(1-\gamma)}(\omega)} J(\omega) d\omega < \infty.$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq C \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

в котором константа C определена равенством (3.49).

Пусть $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$ и $|w_1(\cdot)|$ — однородные функции порядков θ , θ_0 и θ_1 , определенные на конусе $T \subset \mathbb{R}^d$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\omega) &= \rho^{-\theta} |w(\rho \cos \omega_1, \dots, \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|, \\ \tilde{w}_0(\omega) &= \rho^{-\theta_0} |w_0(\rho \cos \omega_1, \dots, \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|, \\ \tilde{w}_1(\omega) &= \rho^{-\theta_1} |w_1(\rho \cos \omega_1, \dots, \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|. \end{aligned}$$

Из теоремы 3.14 аналогично следствию 3.12 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.15. Пусть $(p, q, r) \in \mathcal{P}$, $w(t), w_0(t), w_1(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $\tilde{\theta} > \tilde{\theta}_0$, $\tilde{\theta}_1 > \tilde{\theta}$. Предположим, что

$$\tilde{I} = \int_{\Omega} \frac{\tilde{w}^{\tilde{q}}(\omega)}{\tilde{w}_0^{\tilde{q}\tilde{\gamma}}(\omega) \tilde{w}_1^{\tilde{q}(1-\tilde{\gamma})}(\omega)} J(\omega) d\omega < \infty,$$

где

$$\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{\tilde{\gamma}}{p} - \frac{1-\tilde{\gamma}}{r}.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ и $w_1(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, имеет место точное неравенство

$$(3.54) \quad \|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq \tilde{C}_1 \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^{\tilde{\gamma}} \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\tilde{\gamma}},$$

где

$$\tilde{C}_1 = \tilde{\gamma}^{-\frac{\tilde{\gamma}}{p}} (1-\tilde{\gamma})^{-\frac{1-\tilde{\gamma}}{r}} \left(\frac{B(\tilde{q}\tilde{\gamma}/p + 1, \tilde{q}(1-\tilde{\gamma})/r) \tilde{I}}{r(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta})} \right)^{1/\tilde{q}}.$$

Отметим, что если $d = 1$, то $\tilde{I} = 1$ при $T = \mathbb{R}_+$ и $\tilde{I} = 2$ при $T = \mathbb{R}$. Пусть $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{R}$, а

$$w(t) = 1, \quad w_0(t) = t^{1-(\lambda+1)/p}, \quad w_1(t) = t^{1+(\mu-1)/r}.$$

Из следствия 3.15 получаем неравенство Карлсона-Левина

СЛЕДСТВИЕ 3.16. Пусть $(p, 1, r) \in \mathcal{P}$, $\lambda, \mu > 0$ и $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{R}$. Положим

$$\alpha = \frac{\mu}{p\mu + r\lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p\mu + r\lambda}.$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$(3.55) \quad \|x(t)\|_{L_1(T)} \leq \tilde{C}_2 \|t^{1-(\lambda+1)/p} x(t)\|_{L_p(T)}^{p\alpha} \|t^{1+(\mu-1)/r} x(t)\|_{L_r(T)}^{r\beta},$$

где

$$\tilde{C}_2 = \frac{1}{(p\alpha)^\alpha (r\beta)^\beta} \left(\frac{c_T}{\mu} B\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}, \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\right) \right)^{1-\alpha-\beta},$$

a

$$c_T = \begin{cases} 1, & T = \mathbb{R}_+, \\ 2, & T = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Само хорошо известное неравенство Карлсона

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{\pi} \|x(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|tx(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2}$$

получается из (3.55) при $T = \mathbb{R}_+$, $p = r = 2$ и $\lambda = \mu = 1$.

3.7. Восстановление дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье

Пусть $T = \mathbb{R}^d$, $d\mu(t) = dt$, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$, как и ранее, — однородные функции порядков η и ν , $\varphi(t) \neq 0$ и $\psi(t) \neq 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$X_p = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : \varphi(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d)\},$$

где $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$. Определим оператор D следующим образом

$$Dx(\cdot) = F^{-1}(\varphi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot).$$

Предположим, что $\psi(\cdot)x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для всех $x(\cdot) \in X_p$. Положим

$$\Lambda x(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot).$$

Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении значений оператора Λ по неточно заданному преобразованию Фурье функции $x(\cdot)$ на классе

$$W_p = \{x(\cdot) \in X_p : \|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1\}.$$

Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_p$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$, $\delta > 0$. Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. Предположим, что $\Lambda x(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ для всех $x(\cdot) \in X_p$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m: L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_r(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{pr}(\Lambda, D, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p, y(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R}^d)}.$$

Величина

$$(3.56) \quad E_{pr}(\Lambda, D) = \inf_{m: L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_r(\mathbb{R}^d)} e_{pr}(\Lambda, D, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

3.8. Восстановление в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$

Рассмотрим задачу (3.56) при $r = 2$. В силу теоремы Планшереля

$$\|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\tilde{\Lambda}x(\cdot) - F(m(y))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$\tilde{\Lambda}x(\cdot) = \psi(\cdot)Fx(\cdot).$$

Кроме того,

$$\|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\varphi(\cdot)Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача с точностью до множителя $(2\pi)^{-d/2}$ совпадает с задачей (3.1) при $T_0 = T = \mathbb{R}^d$ и $q = r = 2$ с заменой $\varphi(\cdot)$ на $(2\pi)^{-d/2}\varphi(\cdot)$.

Положим

$$\gamma_1 = \frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad q_1 = \frac{1}{\gamma_1(1/2 - 1/p)}$$

ТЕОРЕМА 3.17. Пусть $\eta > d(1/p - 1/2)$, $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$,

$$J_1 = \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\tilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{q_1(1-\gamma_1)}(\omega)} J(\omega) d\omega < \infty, \quad \Pi_{d-1} = [0, \pi]^{d-2} \times [0, 2\pi].$$

Тогда

$$E_{p2}(\Lambda, D) = \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \sigma,$$

где

$$(3.57) \quad \sigma = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(2\pi)^d(\nu - \eta)}} \left(\frac{BJ_1}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{2(\nu-\eta)}{\nu+d(1/2-1/p)}},$$

а

$$B = B \left(\frac{1}{1 - 2/p}, \frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(\nu - \eta)(1 - 2/p)} \right).$$

Метод

$$(3.58) \quad \hat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\left(\left(1 - \sigma \left| \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} \right|^2 \right)_+ \psi(\xi) y(\xi) \right) (t) \right)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $2 < p < \infty$. Воспользуемся теоремой 3.13. Имеем

$$\begin{aligned} C &= \gamma_1^{-\frac{\gamma_1}{p}} (1 - \gamma_1)^{-\frac{1-\gamma_1}{2}} \left(\frac{B(q_1\gamma_1/p + 1, q_1(1 - \gamma_1)/2) I}{2(\nu - \eta)} \right)^{1/q_1} \\ &= (2\pi)^{d(1-\gamma_1)/2} \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \\ &\quad \times \left(\sqrt{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(2\pi)^d(\nu - \eta)}} \left(\frac{BJ_1}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{\nu-\eta}{\nu+d(1/2-1/p)}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_{p2}(\Lambda, D) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} C \delta^{\gamma_1} = \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \sigma.$$

Далее,

$$\xi_1 = \delta(1 - \gamma_1)^{\frac{p-2}{4p}q_1} C^{\frac{p-2}{2p}q_1} = \delta \left(\sqrt{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{\nu + d(1/2 - 1/p)}} C \right)^{1/\gamma_1} = (2\pi)^{\frac{d}{2\gamma_1}} \sigma^{\frac{1}{2\gamma_1}}.$$

Следовательно, метод

$$\begin{aligned} \hat{m}(y)(t) &= F^{-1} \left(\left(\left(1 - \frac{\xi_1^{2\gamma_1}}{(2\pi)^d} \left| \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} \right|^2 \right)_+ \psi(\xi) y(\xi) \right) (t) \right) \\ &= F^{-1} \left(\left(\left(1 - \sigma \left| \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} \right|^2 \right)_+ \psi(\xi) y(\xi) \right) (t) \right) \end{aligned}$$

является оптимальным.

Пусть теперь $p = \infty$. Из (3.2) имеем

$$(3.59) \quad E_{\infty 2}(\Lambda, D) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{\infty} \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

Определим $\widehat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \delta, & |\psi(\xi)| > \lambda|\varphi(\xi)|, \\ 0, & |\psi(\xi)| \leq \lambda|\varphi(\xi)|, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ выбрано из условия

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Тем самым $\lambda > 0$ надо выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\delta^2 \int_{|\psi(\xi)| > \lambda|\varphi(\xi)|} |\varphi(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^d.$$

Переходя к сферической системе координат, получаем

$$\delta^2 \int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\varphi}^2(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{\Phi_1(\omega)} \rho^{2\nu+d-1} d\rho = (2\pi)^d,$$

где

$$\Phi_1(\omega) = \left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\lambda \widetilde{\varphi}(\omega)} \right)^{\frac{1}{\nu-\eta}}.$$

Отсюда

$$\frac{\delta^2}{2\nu+d} \lambda^{-\frac{2\nu+d}{\nu-\eta}} J_1 = (2\pi)^d.$$

Следовательно,

$$\lambda = \left(\frac{\delta^2 J_1}{(2\pi)^d (2\nu+d)} \right)^{\frac{\nu-\eta}{2\nu+d}}.$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda^2 = \sigma$. Итак, в силу (3.59)

$$\begin{aligned} (3.60) \quad E_{\infty 2}^2(\Lambda, D) &\geq \|\Lambda \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| > \lambda|\varphi(\xi)|} |\psi(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\psi}^2(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{\Phi_1(\omega)} \rho^{2\eta+d-1} d\rho \\ &= \frac{\delta^2}{(2\eta+d)(2\pi)^d} \lambda^{-\frac{2\eta+d}{\nu-\eta}} J_1 = \frac{2\nu+d}{2\eta+d} \sigma^2. \end{aligned}$$

Оценим погрешность метода (3.58). Положим

$$\lambda(\xi) = \left(1 - \sigma \frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|^2} \right)_+.$$

Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\|\Lambda x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 |Fx(\xi) - \lambda(\xi)y(\xi)|^2 d\xi.$$

Положим $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\|z(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Тогда

$$\|\Lambda x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 |(1 - \lambda(\xi)) Fx(\xi) + \lambda(\xi)z(\xi)|^2 d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$\left| \frac{|\psi(\xi)|(1-\lambda(\xi))\sqrt{\sigma}|\varphi(\xi)|Fx(\xi)}{\sqrt{\sigma}|\varphi(\xi)|} + \sqrt{\lambda(\xi)}\sqrt{\lambda(\xi)}|\psi(\xi)|z(\xi) \right|^2.$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$|ab + cd|^2 \leq (|a|^2 + |c|^2)(|b|^2 + |d|^2).$$

Получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} & \|\Lambda x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \text{vraisup}_{\xi \in \mathbb{R}^d} S(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\sigma|\varphi(\xi)|^2 |Fx(\xi)|^2 + \lambda(\xi)|\psi(\xi)|^2 |z(\xi)|^2) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$S(\xi) = \frac{|\psi(\xi)|^2(1-\lambda(\xi))^2}{\sigma|\varphi(\xi)|^2} + \lambda(\xi).$$

Если $|\psi(\xi)|^2 \leq \sigma|\varphi(\xi)|^2$, то $\lambda(\xi) = 0$ и $S(\xi) \leq 1$. Если $|\psi(\xi)|^2 > \sigma|\varphi(\xi)|^2$, то $S(\xi) = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} e_{\infty 2}^2(\Lambda, D, \widehat{m}) & \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\sigma|\varphi(\xi)|^2 |Fx(\xi)|^2 + \lambda(\xi)|\psi(\xi)|^2 |z(\xi)|^2) d\xi \\ & \leq \sigma + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)|^2 > \lambda|\varphi(\xi)|^2} (|\psi(\xi)|^2 - \sigma|\varphi(\xi)|^2) d\xi \\ & = \sigma + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)|^2 > \lambda|\varphi(\xi)|^2} |\psi(\xi)|^2 d\xi - \sigma \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi \\ & = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)|^2 > \lambda|\varphi(\xi)|^2} |\psi(\xi)|^2 d\xi \leq E_{\infty 2}^2(\Lambda, D). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot)$ является оптимальным и (с учетом (3.60))

$$E_{\infty 2}^2(\Lambda, D) = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)|^2 > \lambda|\varphi(\xi)|^2} |\psi(\xi)|^2 d\xi = \frac{2\nu + d}{2\nu + d} \sigma^2.$$

□

Пусть $d = 1$, ν, η — целые неотрицательные числа, $\varphi(\xi) = (i\xi)^\nu$, $\psi(\xi) = (i\xi)^\eta$. Тогда $D = \frac{d^\nu}{dt^\nu}$, а $\Lambda = \frac{d^\eta}{dt^\eta}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.18. Пусть ν, η — целые, $\eta \geq 0$, $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$. Тогда

$$E_{p2} \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right) = \sqrt{\frac{\nu + 1/2 - 1/p}{\eta + 1/2 - 1/p}} \sigma_1,$$

где

$$\sigma_1 = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + 1/2 - 1/p}{2\pi(\nu - \eta)}} \left(\frac{B_1}{\nu + 1/2 - 1/p} \right)^{1/2 - 1/p} \right)^{\frac{2(\nu - \eta)}{\nu + 1/2 - 1/p}},$$

а

$$B_1 = B \left(\frac{1}{1 - 2/p}, \frac{\eta + 1/2 - 1/p}{(\nu - \eta)(1 - 2/p)} \right).$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\left(1 - \sigma_1 |\xi|^{2(\nu - \eta)} \right)_+ (i\xi)^\eta y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

Рассмотрим случай $p = 2$.

ТЕОРЕМА 3.19. Пусть ν, η — целые, $\eta \geq 0$, $\nu > \eta$. Тогда

$$(3.61) \quad E_{22} \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right) = \left(\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \right)^{1-\frac{\eta}{\nu}}.$$

Для всех $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$(3.62) \quad \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_1 |\xi|^{2(\nu-\eta)}} + \frac{|\xi|^{2\eta} |a(\xi)|^2}{\lambda_2} \leq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\eta}{\nu} \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\eta/\nu-1}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\eta/\nu} \left(1 - \frac{\eta}{\nu} \right),$$

методы

$$(3.63) \quad \widehat{m}(y)(t) = F^{-1} (a(\xi)(i\xi)^\eta y(\xi)) (t)$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) имеем

$$E_{22}^2 \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2 \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|x^{(\eta)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Переходя к образам Фурье экстремальная задача в правой части может быть записана в виде

$$(3.64) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\eta} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ такова, что

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \frac{\delta}{\varepsilon}, & \xi \in ((\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu} - \varepsilon^2, (\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu}), \\ 0, & \xi \notin (\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu} - \varepsilon^2, \sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu}, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \int_{(\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu} - \varepsilon^2}^{(\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu}} d\xi = \delta^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\nu} |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{2\pi\varepsilon^2} \int_{(\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu} - \varepsilon^2}^{(\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu}} |\xi|^{2\nu} d\xi \leq 1.$$

Следовательно, функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой в задаче (3.64). Поэтому

$$\begin{aligned} E_{22}^2 \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\eta} |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{2\pi\varepsilon^2} \int_{(\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu} - \varepsilon^2}^{(\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu}} |\xi|^{2\eta} d\xi \\ &\leq \frac{\delta^2}{2\pi} \left((\sqrt{2\pi}/\delta)^{1/\nu} - \varepsilon^2 \right)^{2\eta} \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем

$$E_{22}^2 \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right) \geq \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{1-\frac{\eta}{\nu}}.$$

Оценим погрешность методов (3.63). Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\left\| \frac{d^\eta}{dt^\eta} x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\eta} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi.$$

Положим $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Тогда

$$\left\| \frac{d^\eta}{dt^\eta} x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\eta} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)z(\xi)|^2 d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$\left| \frac{|\xi|^\eta (1 - a(\xi))}{\sqrt{\lambda_1} |\xi|^\nu} \sqrt{\lambda_1} |\xi|^\nu Fx(\xi) + \frac{|\xi|^\eta a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}} \sqrt{\lambda_2} z(\xi) \right|^2.$$

Применяя неравенством Коши–Буняковского, получаем следующую оценку

$$\left\| \frac{d^\eta}{dt^\eta} x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} S(\xi) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\lambda_1 |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_2 |z(\xi)|^2) d\xi,$$

где

$$S(\xi) = \frac{|\xi|^{2\eta} |1 - a(\xi)|^2}{\lambda_1 |\xi|^{2\nu}} + \frac{|\xi|^{2\eta} |a(\xi)|^2}{\lambda_2}.$$

Если $a(\cdot)$ удовлетворяет условию (3.62), то $S(\xi) \leq 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$. Тогда получаем оценку

$$e_{22}^2 \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu}, \widehat{m} \right) \leq \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\delta^2}{2\pi} = \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{1 - \frac{\eta}{\nu}} \leq E_{22}^2 \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right).$$

Отсюда вытекает, что соответствующий метод является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления справедливо равенство (3.61).

Покажем, что множество функций $a(\cdot)$, для которых выполнено условие (3.62) не пусто. Рассмотрим уравнение касательной к кривой $y = x^{\eta/\nu}$, $x \geq 0$, в точке $2\pi/\delta^2$. Нетрудно убедиться, что уравнение этой касательной $y = \lambda_1 x + \lambda_2$. В силу вогнутости кривой $y = x^{\eta/\nu}$ для всех точек, лежащих на этой кривой выполняется неравенство

$$y \leq \lambda_1 x + \lambda_2.$$

Тем самым для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$(3.65) \quad |\xi|^{2\eta} \leq \lambda_1 |\xi|^{2\nu} + \lambda_2.$$

Тогда для функции

$$a(\xi) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}}$$

имеем

$$\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_1 |\xi|^{2(\nu - \eta)}} + \frac{|\xi|^{2\eta} |a(\xi)|^2}{\lambda_2} = \frac{|\xi|^{2\eta}}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}} \leq 1.$$

□

Отметим, что функция

$$a_0(\xi) = \begin{cases} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}}, & |\xi| < \sigma_0, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

где

$$\sigma_0 = \left(\frac{\nu}{\eta} \right)^{\frac{1}{2(\nu - \eta)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2\nu}},$$

удовлетворяет условию (3.62). Поэтому метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}(a_0(\xi)(i\xi)^\eta y(\xi))(t)$$

является оптимальным. Этот метод использует информацию о приближенном преобразовании Фурье только на интервале $(-\sigma_0, \sigma_0)$. Причем с увеличением погрешности δ , с которой измеряется преобразование Фурье, этот интервал уменьшается.

Выделяя полный квадрат, можно записать условие (3.62) в эквивалентной форме

$$\left| a(\xi) - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}} \right| \leq \frac{|\xi|^{\nu-\eta} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \sqrt{-|\xi|^{2\eta} + \lambda_1 |\xi|^{2\nu} + \lambda_2}}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}}$$

(в силу (3.65) подкоренное выражение неотрицательно). Поэтому функция $a(\cdot)$ удовлетворяет условию (3.62) в том и только в том случае, если она имеет вид

$$a(\xi) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}} + \theta(\xi) \frac{|\xi|^{\nu-\eta} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \sqrt{-|\xi|^{2\eta} + \lambda_1 |\xi|^{2\nu} + \lambda_2}}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}},$$

где $\theta(\cdot)$ измеримая функция, для которой $|\theta(\xi)| \leq 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Определим оператор $(-\Delta)^{\nu/2}$, $\nu \geq 0$, (степень оператора Лапласа) следующим образом

$$(-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot) = F^{-1}(|\xi|^\nu Fx(\xi))(\cdot), \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2}.$$

Положим

$$(3.66) \quad I_0 = \int_{\Pi_{d-1}} J(\omega) d\omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Из теоремы 3.17 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.20. Пусть $\eta \geq 0$, $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$. Тогда

$$E_{p2}((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2}) = \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \sigma,$$

где

$$\sigma = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(2\pi)^d(\nu - \eta)}} \left(\frac{BI_0}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2 - 1/p} \right)^{\frac{2(\nu - \eta)}{\nu + d(1/2 - 1/p)}}.$$

Метод

$$\hat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\left(1 - \sigma |\xi|^{2(\nu - \eta)} \right)_+ |\xi|^\eta y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

Рассмотрим отдельно случай, когда $p = 2$.

ТЕОРЕМА 3.21. Пусть $\eta > 0$, $\nu > \eta$. Тогда

$$(3.67) \quad E_{22} \left((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2} \right) = \left(\frac{\delta}{(2\pi)^{d/2}} \right)^{1 - \frac{\eta}{\nu}}.$$

Для всех $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$(3.68) \quad \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_1 |\xi|^{2(\nu - \eta)}} + \frac{|\xi|^{2\eta} |a(\xi)|^2}{\lambda_2} \leq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\eta}{\nu} \left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2} \right)^{\eta/\nu - 1}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2} \right)^{\eta/\nu} \left(1 - \frac{\eta}{\nu} \right),$$

методы

$$(3.69) \quad \hat{m}(y)(t) = F^{-1} (a(\xi) |\xi|^\eta y(\xi)) (t)$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по той же схеме, как и доказательство теоремы 3.19. Из (3.2) имеем

$$E_{22} \left((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2} \right) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2 \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Переходя к образам Фурье экстремальная задача в правой части может быть записана в виде

$$(3.70) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\eta} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Положим

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\frac{(2\pi)^{d/2}}{\delta} \right)^{1/\nu} (1, \dots, 1).$$

Пусть $0 < \varepsilon < |\widehat{\xi}|/2$. Через B_ε обозначим шар радиуса ε с центром в точке $\widehat{\xi}_\varepsilon = (1 - \varepsilon/|\widehat{\xi}|)\widehat{\xi}$. Через $|B_\varepsilon|$ будем обозначать объем этого шара. Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ такова, что

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{|B_\varepsilon|}}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} d\xi = \delta^2,$$

а

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\nu} |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d |B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\nu} d\xi \leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} |\widehat{\xi}|^{2\nu} = 1.$$

Следовательно, функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой в задаче (3.70). Поэтому

$$E_{22}^2 \left((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2} \right) \geq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\eta} |F\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi \\ = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d |B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\eta} d\xi \geq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} |\widehat{\xi}|^{2\eta} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{|\widehat{\xi}|} \right)^{2\eta}.$$

В силу произвольности ε имеем

$$E_{22}^2 \left((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2} \right) \geq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} |\widehat{\xi}|^{2\eta} = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1 - \frac{\eta}{\nu}}.$$

Оценим погрешность методов (3.69). Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\left\| (-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\eta} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi.$$

Положим $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Тогда

$$\left\| (-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\eta} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)z(\xi)|^2 d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$\left| \frac{|\xi|^\eta(1-a(\xi))}{\sqrt{\lambda_1}|\xi|^\nu} \sqrt{\lambda_1}|\xi|^\nu Fx(\xi) + \frac{|\xi|^\eta a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}} \sqrt{\lambda_2} z(\xi) \right|^2.$$

Применяя неравенством Коши–Буняковского, получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} & \left\| (-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \operatorname{vraisup}_{\xi \in \mathbb{R}^d} S(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda_1 |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_2 |z(\xi)|^2) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$S(\xi) = \frac{|\xi|^{2\eta} |1-a(\xi)|^2}{\lambda_1 |\xi|^{2\nu}} + \frac{|\xi|^{2\eta} |a(\xi)|^2}{\lambda_2}.$$

Если $a(\cdot)$ удовлетворяет условию (3.68), то $S(\xi) \leq 1$ для почти всех $\widehat{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Тогда получаем оценку

$$\begin{aligned} e_{22}^2 \left((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2}, \widehat{m} \right) & \leq \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \\ & = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-\frac{\eta}{\nu}} \leq E_{22}^2 \left((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что соответствующий метод является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления справедливо равенство (3.67).

Покажем, что множество функций $a(\cdot)$, для которых выполнено условие (3.68) не пусто. Повторяем рассуждения, проводимые в аналогичном месте при доказательстве теоремы 3.19. Рассматриваем уравнение касательной к кривой $y = x^{\eta/\nu}$, $x \geq 0$, в точке $(2\pi)^d/\delta^2$. Убеждаемся, что уравнение этой касательной имеет вид $y = \lambda_1 x + \lambda_2$. В силу вогнутости кривой $y = x^{\eta/\nu}$ для всех точек, лежащих на этой кривой выполняется неравенство

$$y \leq \lambda_1 x + \lambda_2.$$

Тем самым для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\xi|^{2\eta} \leq \lambda_1 |\xi|^{2\nu} + \lambda_2.$$

Тогда для функции

$$a(\xi) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}}$$

имеем

$$\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_1 |\xi|^{2(\nu-\eta)}} + \frac{|\xi|^{2\eta} |a(\xi)|^2}{\lambda_2} = \frac{|\xi|^{2\eta}}{\lambda_2 + \lambda_1 |\xi|^{2\nu}} \leq 1.$$

□

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Определим оператор D^α (производная порядка α) следующим образом

$$(3.71) \quad D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha Fx(\xi))(\cdot),$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$. Функция $|(i\xi)^\alpha|$ является однородной функцией порядка $\eta = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Рассмотрим задачу (3.56) при $\Lambda = D^\alpha$, $D = (-\Delta)^{\nu/2}$ и $r = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 3.22. Пусть $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$, а σ определено равенством (3.57), в котором

$$J_1 = 2 \frac{\Gamma((\alpha_1 q_1 + 1)/2) \dots \Gamma((\alpha_d q_1 + 1)/2)}{\Gamma((\eta q_1 + d)/2)},$$

a

$$q_1 = \frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{(\nu - \eta)(1/2 - 1/p)}.$$

Тогда

$$E_{p2}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \sigma,$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\left(1 - \sigma \frac{|\xi|^{2n}}{|\xi^{2\alpha}|} \right)_+ (i\xi)^\alpha y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По известной формуле Дирихле [102, стр. 395]

$$\int_{\substack{t_1 \geq 0, \dots, t_d \geq 0 \\ t_1^2 + \dots + t_d^2 \leq 1}} t_1^{p_1-1} \dots t_d^{p_d-1} dt_1 \dots dt_d = \frac{\Gamma(p_1/2) \dots \Gamma(p_d/2)}{2^d \Gamma(p_1/2 + \dots + p_d/2 + 1)},$$

$p_1, \dots, p_d > 0$. Следовательно,

$$\int_{t_1^2 + \dots + t_d^2 \leq 1} |t_1|^{p_1-1} \dots |t_d|^{p_d-1} dt_1 \dots dt_d = \frac{\Gamma(p_1/2) \dots \Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2 + \dots + p_d/2 + 1)}.$$

Перейдем к сферическим координатам

$$\int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega, p_1, \dots, p_d) J(\omega) d\omega \int_0^1 \rho^{p_1 + \dots + p_d - 1} d\rho = \frac{\Gamma(p_1/2) \dots \Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2 + \dots + p_d/2 + 1)},$$

где

$$\Phi(\omega, p_1, \dots, p_d) = |\cos \omega_1|^{p_1-1} \dots |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}|^{p_d-1}.$$

Отсюда

$$\int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega, p_1, \dots, p_d) J(\omega) d\omega = 2 \frac{\Gamma(p_1/2) \dots \Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2 + \dots + p_d/2)}.$$

Таким образом, для величины J_1 из теоремы 3.17 имеем

$$\begin{aligned} (3.72) \quad J_1 &= \int_{\Pi_{d-1}} |\cos \omega_1|^{\alpha_1 q_1} \dots |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}|^{\alpha_d q_1} J(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega, \alpha_1 q_1 + 1, \dots, \alpha_d q_1 + 1) J(\omega) d\omega = \\ &\quad 2 \frac{\Gamma((\alpha_1 q_1 + 1)/2) \dots \Gamma((\alpha_d q_1 + 1)/2)}{\Gamma((\eta q_1 + d)/2)}. \end{aligned}$$

Теперь доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.17. $\square$

Рассмотрим случай $p = 2$.

ТЕОРЕМА 3.23. Пусть $\eta > 0$ и $\nu > \eta$. Тогда

$$(3.73) \quad E_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2}) = \frac{\alpha^{\alpha/2}}{\eta^{\eta/2}} \left(\frac{\delta}{(2\pi)^{d/2}} \right)^{1-\eta/\nu},$$

а все методы

$$(3.74) \quad \widehat{m}(y)(t) = F^{-1}(a(\xi)(i\xi)^\alpha y(\xi))(t),$$

где $a(\cdot)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию

$$(3.75) \quad |\xi^{2\alpha}| \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2\nu}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) \leq 1,$$

в котором

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^\alpha(\nu - \eta)}{\eta^\eta \nu} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-\eta/\nu}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\eta}{\nu - \eta} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d},$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) имеем

$$E_{22} \left(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2} \right) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2 \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Переходя к образам Фурье экстремальная задача в правой части может быть записана в виде

$$(3.76) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^{2\alpha}| |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Положим

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2\nu}} (\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_d}), \quad \widehat{\xi}_\varepsilon = \widehat{\xi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{|\widehat{\xi}|} \right), \quad 0 < \varepsilon < |\widehat{\xi}|, \\ B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Определим функцию $\widehat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{|B_\varepsilon|}}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \delta^2$,

$$\|(-\Delta)^{\nu/2} \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d |B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\nu} d\xi \leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} |\widehat{\xi}|^{2\nu} = 1.$$

Таким образом, функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой в задаче (3.76). Поэтому

$$E_{22}^2(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2}) \geq \sup_{\substack{\|(-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \geq \|D^\alpha \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d |B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} |\xi^{2\alpha}| d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} |\xi_0^{2\alpha}|,$$

где ξ_0 — некоторая точка из B_ε . Устремляя ε к нулю, получаем оценку

$$(3.77) \quad E_{22}^2(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2}) \geq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} |\widehat{\xi}^{2\alpha}| = \frac{\alpha^\alpha}{\eta^\eta} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-\eta/\nu}.$$

Будем искать оптимальные методы среди методов, имеющих вид (3.74). Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^{2\alpha}| |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi.$$

Положим $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Тогда

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^{2\alpha}| |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)z(\xi)|^2 d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$|\xi^{2\alpha}| \left| \frac{(1 - a(\xi))\sqrt{\lambda_2}|\xi|^\nu Fx(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^\nu} + \frac{a(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}z(\xi) \right|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \text{vraisup}_{\xi \in \mathbb{R}^d} S(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda_2 |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_1 |z(\xi)|^2) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$S(\xi) = |\xi^{2\alpha}| \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2\nu}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right).$$

Если предположить, что $S(\xi) \leq 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$, то, учитывая (3.77), получаем

$$\begin{aligned} (3.78) \quad e_{22}^2(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2}, \widehat{m}) &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda_2 |\xi|^{2\nu} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_1 |z(\xi)|^2) d\xi \\ &\leq \lambda_2 + \lambda_1 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} = \frac{\alpha^\alpha}{\eta^\eta} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-\eta/\nu} \leq E_{22}^2(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оптимальность рассматриваемых методов и равенство (3.73).

Остается доказать, что множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию (3.75) не пусто. Покажем, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$(3.79) \quad -|\xi^{2\alpha}| + \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\nu} \geq 0.$$

Из неравенства (см. [101, стр. 302])

$$\left(\prod_{j=1}^d x_j^{p_j} \right)^{\frac{1}{\sum_{j=1}^d p_j}} \leq \frac{\sum_{j=1}^d p_j x_j}{\sum_{j=1}^d p_j},$$

положив $x_j = |t_j|^2/\alpha_j$, $p_j = \alpha_j$, получаем

$$|t^{2\alpha}| \leq \frac{\alpha^\alpha}{\eta^\eta} |t|^{2\eta}.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = x^{\eta/\nu}$, $x \geq 0$. Касательная к этой функции в любой точке $x_0 > 0$ имеет вид

$$y = \frac{\eta}{\nu} x_0^{\eta/\nu-1} x + \frac{\nu-\eta}{\nu} x_0^{\eta/\nu}.$$

Функция $y(\cdot)$ — вогнутая, поэтому при всех $x \geq 0$

$$x^{\eta/\nu} \leq \frac{\eta}{\nu} x_0^{\eta/\nu-1} s + \frac{\nu-\eta}{\nu} x_0^{\eta/\nu}.$$

Положив $x_0 = |\widehat{\xi}|^{2\nu}$, $x = |\xi|^{2\nu}$, получаем

$$|\xi^{2\alpha}| \leq \frac{\alpha^\alpha}{\eta^\eta} |\xi|^{2\eta} \leq \frac{\alpha^\alpha}{\eta^\eta} \left(\frac{\eta}{\nu} |\widehat{\xi}|^{2(\eta-\nu)} |\xi|^{2\nu} + \frac{\nu-\eta}{\nu} |\widehat{\xi}|^{2\eta} \right).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\alpha^\alpha(\nu-\eta)}{\eta^\eta \nu} |\widehat{\xi}|^{2\eta} = \lambda_1, \quad \frac{\alpha^\alpha}{\eta^{\eta-1} \nu} |\widehat{\xi}|^{2(\eta-\nu)} = \lambda_2.$$

Таким образом,

$$|\xi^{2\alpha}| \leq \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\nu}.$$

Для функции

$$a(\xi) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\nu}}$$

имеем

$$|\xi^{2\alpha}| \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2\nu}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) = \frac{|\xi^{2\alpha}|}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\nu}} \leq 1.$$

Следовательно, множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию (3.75) не пусто. $\square$

3.9. Восстановление в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$

Рассмотрим задачу (3.56) при $r = \infty$. Положим

$$(3.80) \quad \hat{\gamma}_d = \frac{\nu - \eta - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad \hat{q}_d = \frac{1}{1/2 + \gamma_2(1/2 - 1/p)}.$$

Пусть функция $\kappa(\cdot)$ при $1 < p < \infty$ определена равенством

$$\frac{\kappa(\xi)}{(1 - \kappa(\xi))^{p-1}} = (2\pi)^d \frac{|\psi(\xi)|^{p-2}}{|\varphi(\xi)|^{2(p-1)}},$$

при $p = 1$

$$\kappa(\xi) = \min\{1, (2\pi)^d |\psi(\xi)|^{-1}\},$$

а при $p = \infty$

$$\kappa(\xi) = \left(1 - \frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|} \right)_+.$$

ТЕОРЕМА 3.24. Пусть $\eta > d(1/p - 1)$, $\nu > \eta + d/2$ и $1 \leq p \leq \infty$. Предположим, что

$$J_2 = \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\tilde{\psi}^{\hat{q}_d}(\omega)}{\tilde{\varphi}^{\hat{q}_d(1-\hat{\gamma}_d)}(\omega)} J(\omega) d\omega < \infty.$$

Тогда

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) = \sqrt{\frac{(\nu + d(1/2 - 1/p)) \hat{B}_d J_2 (2\pi)^{-d\hat{q}_d(1+\hat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu - \eta - d/2)(\eta + d(1 - 1/p))}} \sigma,$$

где

$$\sigma = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + d(1 - 1/p)}{\nu - \eta - d/2}} \left(\frac{\hat{B}_d J_2 (2\pi)^{-d\hat{q}_d(1+\hat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2 - 1/p} \right)^{\frac{\nu - \eta - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}},$$

а

$$(3.81) \quad \hat{B}_d = B(\hat{q}_d \hat{\gamma}_d / p + 1, \hat{q}_d(1 - \hat{\gamma}_d)/2).$$

Метод

$$\hat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\kappa \left(\sigma^{\frac{1}{\nu - \eta - d/2}} \xi \right) \psi(\xi) y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.2) имеем

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p \\ \|F x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Предположим, что $x(\cdot) \in W_p$ и $\|F x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$. Если взять $\hat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$F \hat{x}(\xi) = \varepsilon(\xi) e^{-i\langle t, \xi \rangle} F x(\xi),$$

где

$$\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \frac{\overline{\psi(\xi)Fx(\xi)}}{|\psi(\xi)Fx(\xi)|}, & \psi(\xi)Fx(\xi) \neq 0, \\ 0, & \psi(\xi)Fx(\xi) = 0, \end{cases}, \quad \langle t, \xi \rangle = t_1\xi_1 + \dots + t_d\xi_d,$$

то $\widehat{x}(\cdot) \in W_p$, $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} \leq \delta$ и

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)F\widehat{x}(\xi)e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \right| = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)Fx(\xi)| d\xi.$$

Поэтому

$$(3.82) \quad E_{p\infty}(\Lambda, D) \geq \frac{1}{(2\pi)^d} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)Fx(\xi)| d\xi.$$

Пусть $1 \leq p < \infty$. Из (3.35) вытекает, что

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geq E(p, 1, 2),$$

где в задаче о нахождении $E(p, 1, 2)$ функцию $\varphi(\cdot)$ следует заменить на $(2\pi)^{-d/2}\varphi(\cdot)$, а функцию $\psi(\cdot)$ на $(2\pi)^{-d}\psi(\cdot)$. Применяя теорему 3.13, получаем

$$E(p, 1, 2) = C\delta^{\widehat{\gamma}_d},$$

где

$$C = \widehat{\gamma}_d^{-\frac{\widehat{\gamma}_d}{p}} (1 - \widehat{\gamma}_d)^{-\frac{1-\widehat{\gamma}_d}{2}} \left(\frac{\widehat{B}_d J_2(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu - \eta - d/2)} \right)^{1/\widehat{q}_d} \delta^{\widehat{\gamma}_d}.$$

После несложных преобразований получаем

$$(3.83) \quad E(p, 1, 2) = \sqrt{\frac{(\nu + d(1/2 - 1/p))\widehat{B}_d J_2(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu - \eta - d/2)(\eta + d(1 - 1/p))}} \sigma.$$

Из той же теоремы 3.13 вытекает, что при $x(\cdot) \in W_p$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} \leq \delta$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \psi(\xi)Fx(\xi) - m(y)(\xi) \right| d\xi \leq E(p, 1, 2),$$

где

$$m(y)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \kappa \left(\xi_1^{\frac{1}{\nu+d(1/2-1/p)}} \xi \right) \psi(\xi)y(\xi),$$

а

$$\xi_1 = \delta (\widehat{\gamma}_d^{-1}(1 - \widehat{\gamma}_d)^{p-1} C^{p-2})^{\frac{\widehat{q}_d}{2p}} = \sigma^{1/\widehat{\gamma}_d}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} m(y)(\xi)e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \psi(\xi)Fx(\xi) - m(y)(\xi) \right| d\xi \leq E(p, 1, 2) \leq E_{p\infty}(\Lambda, D). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot)$ является оптимальным, а погрешность оптимального восстановления совпадает с величиной $E(p, 1, 2)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $p = \infty$. Положим

$$s(\xi) = \begin{cases} \frac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|}, & \psi(\xi) \neq 0, \\ 1, & \psi(\xi) = 0. \end{cases}$$

Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ такова, что

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \overline{\delta s(\xi)}, & |\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2, \\ \frac{\delta}{\lambda} \frac{\overline{\psi(\xi)}}{|\varphi(\xi)|^2}, & |\psi(\xi)| < \lambda |\varphi(\xi)|^2. \end{cases}$$

Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\|D\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Тогда для нахождения λ получаем уравнение

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} |\varphi(\xi)|^2 d\xi + \frac{\delta^2 \lambda^{-2}}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| < \lambda |\varphi(\xi)|^2} \frac{|\psi(\xi)|^2}{|\varphi(\xi)|^2} d\xi = 1.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\varphi}^2(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{\Phi_2(\omega)} \rho^{2\nu+d-1} d\rho \\ + \frac{\delta^2 \lambda^{-2}}{(2\pi)^d} \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^2(\omega)}{\widetilde{\varphi}^2(\omega)} J(\omega) d\omega \int_{\Phi_2(\omega)}^{+\infty} \rho^{-2\nu+2\eta+d-1} d\rho = 1, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_2(\omega) = \left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\lambda \widetilde{\varphi}^2(\omega)} \right)^{\frac{1}{2\nu-\eta}}.$$

Тем самым получаем уравнение

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \lambda^{-\frac{2\nu+d}{2\nu-\eta}} \frac{4\nu-2\eta}{(2\nu+d)(2\nu-2\eta-d)} J_2 = 1.$$

Отсюда

$$\lambda = \left(\frac{\delta^2(4\nu-2\eta)}{(2\pi)^d(2\nu+d)(2\nu-2\eta-d)} J_2 \right)^{\frac{2\nu-\eta}{2\nu+d}}.$$

Из (3.82) вытекает, что

$$\begin{aligned} E_{\infty\infty}(\Lambda, D) &\geq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)| |F\widehat{x}(\xi)| d\xi = \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} |\psi(\xi)| d\xi \\ &+ \frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| < \lambda |\varphi(\xi)|^2} \frac{|\psi(\xi)|^2}{|\varphi(\xi)|^2} d\xi = \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\psi}(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{\Phi_2(\omega)} \rho^{\eta+d-1} d\rho \\ &+ \frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d} \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^2(\omega)}{\widetilde{\varphi}^2(\omega)} J(\omega) d\omega \int_{\Phi_2(\omega)}^{+\infty} \rho^{-2\nu+2\eta+d-1} d\rho = \frac{\delta \lambda^{-\frac{\eta+d}{2\nu-\eta}}}{(2\pi)^d(\eta+d)} J_2 \\ &+ \frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d(2\nu-2\eta-d)} \lambda^{\frac{2\nu-2\eta-d}{2\nu-\eta}} J_2 = \frac{\delta(2\nu-\eta) \lambda^{-\frac{\eta+d}{2\nu-\eta}} J_2}{(2\pi)^d(\eta+d)(2\nu-2\eta-d)} = \widehat{E}, \end{aligned}$$

где

$$\widehat{E} = \frac{(\nu+d/2)^{\frac{\eta+d}{2\nu+d}}}{\eta+d} \left(\frac{(2\nu-\eta) J_2}{(2\pi)^d(2\nu-2\eta-d)} \right)^{\frac{2\nu-\eta}{2\nu+d}} \delta^{\frac{2\nu-2\eta-d}{2\nu+d}}.$$

Докажем, что для всех $x(\cdot) \in X_\infty$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} (3.84) \quad \Lambda x(t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \\ &+ \frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 Fx(\xi) \overline{F\widehat{x}(\xi)} e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \\
& \quad + \frac{\lambda}{\delta (2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 Fx(\xi) \overline{F\widehat{x}(\xi)} e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \\
& = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \\
& \quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2 Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \\
& \quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| < \lambda |\varphi(\xi)|^2} \psi(\xi) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \\
& = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi = \Lambda x(t).
\end{aligned}$$

Оценим погрешность метода

$$m(y)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2) y(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
|\Lambda x(t) - m(y)(t)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2) y(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2) Fx(\xi) e^{i\langle t, \xi \rangle} d\xi \right| \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} |\psi(\xi) - \lambda s(\xi) |\varphi(\xi)|^2| |Fx(\xi) - y(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Для $x(\cdot)$ таких, что

$$\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1,$$

учитывая (3.84), получаем

$$|\Lambda x(t) - m(y)(t)| \leq \frac{\lambda}{\delta (2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 |Fx(\xi)| |F\widehat{x}(\xi)| d\xi + \mu \leq \frac{\lambda}{\delta} + \mu,$$

где

$$\mu = \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} (|\psi(\xi) - \lambda |\varphi(\xi)|^2|) d\xi.$$

Выше было вычислено

$$\frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} |\psi(\xi)| d\xi = \frac{\delta \lambda^{-\frac{\eta+d}{2\nu-\eta}}}{(2\pi)^d (\eta+d)} J_2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\lambda}{(2\pi)^d} \int_{|\psi(\xi)| \geq \lambda |\varphi(\xi)|^2} |\varphi(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\Pi_{d-1}} \tilde{\varphi}^2(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{\Phi_2(\omega)} \rho^{2\nu+d-1} d\rho \\ &= \frac{\delta\lambda^{-\frac{\eta+d}{2\nu-\eta}}}{(2\pi)^d (2\nu+d)} J_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mu = \frac{\delta\lambda^{-\frac{\eta+d}{2\nu-\eta}} (2\nu-\eta)}{(2\pi)^d (\eta+d)(2\nu+d)} J_2.$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda/\delta + \mu = \hat{E}$, поэтому

$$e_{\infty\infty}(\Lambda, D, m) \leq \hat{E} \leq E_{\infty\infty}(\Lambda, D).$$

Отсюда вытекает, что $m(y)(\cdot)$ — оптимальный метод, а погрешность оптимального восстановления равна $\hat{E}$. Несложная проверка показывает, что при $p = \infty$ правая часть равенства (3.83) совпадает с $\hat{E}$.

Метод $m(y)(\cdot)$ может быть записан в виде

$$m(y)(t) = F^{-1} \left(\left(1 - \lambda \frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|} \right)_+ \psi(\xi) y(\xi) \right) (t).$$

При $p = \infty$

$$\hat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\left(1 - \sigma^{\frac{2\nu-\eta}{\nu-\eta-d/2}} \frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|} \right)_+ \psi(\xi) y(\xi) \right) (t).$$

Легко убедиться, что при $p = \infty$ $\sigma^{\frac{2\nu-\eta}{\nu-\eta-d/2}} = \lambda$. Поэтому $m(y)(\cdot) = \hat{m}(y)(\cdot)$. $\square$

Пусть $d = 1, \nu, \eta$ — целые неотрицательные числа, $\varphi(\xi) = (i\xi)^\nu, \psi(\xi) = (i\xi)^\eta$. Тем самым рассматривается случай, когда $D = \frac{d^\nu}{dt^\nu}$, а $\Lambda = \frac{d^\eta}{dt^\eta}$. Пусть функция $\kappa_d^*(\cdot)$ при $1 < p < \infty$ определена равенством

$$\frac{\kappa_d^*(\xi)}{(1 - \kappa_d^*(\xi))^{p-1}} = (2\pi)^d \frac{|\xi|^{\eta(p-2)}}{|\xi|^{2\nu(p-1)}},$$

при $p = 1$

$$\kappa_d^*(\xi) = \min\{1, (2\pi)^d |\xi|^{-\eta}\},$$

а при $p = \infty$

$$\kappa_d^*(\xi) = (1 - |\xi|^{2\nu-\eta})_+.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.25. Пусть ν, η — целые, $\eta \geq 0, \nu > \eta, \eta + p > 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$E_{p\infty} \left(\frac{d^\eta}{dt^\eta}, \frac{d^\nu}{dt^\nu} \right) = \sqrt{\frac{(\nu + 1/2 - 1/p) \hat{B}_1(2\pi)^{-\hat{q}_1(1+\hat{\gamma}_1)/2}}{(\nu - \eta - 1/2)(\eta + 1 - 1/p)}} \sigma,$$

где

$$\sigma = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + 1 - 1/p}{\nu - \eta - 1/2}} \left(\frac{\hat{B}_1(2\pi)^{-\hat{q}_1(1+\hat{\gamma}_1)/2}}{\nu + 1/2 - 1/p} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{\nu-\eta-1/2}{\nu+1/2-1/p}}.$$

Метод

$$\hat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\kappa_1^* \left(\sigma^{\frac{1}{\nu-\eta-1/2}} \xi \right) (i\xi)^\eta y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

Применим теорему 3.24 к операторам $\Lambda = (-\Delta)^{\eta/2}$ и $D = (-\Delta)^{\nu/2}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.26. Пусть $\eta \geq 0$, $\nu > \eta + d/2$, $\eta + p > 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$E_{p\infty}((-\Delta)^{\eta/2}, (-\Delta)^{\nu/2}) = \sqrt{\frac{(\nu + d(1/2 - 1/p))\widehat{B}_d I_0(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu - \eta - d/2)(\eta + d(1 - 1/p))}} \widehat{\sigma},$$

где

$$\widehat{\sigma} = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + d(1 - 1/p)}{\nu - \eta - d/2}} \left(\frac{\widehat{B}_d I_0(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{\nu - \eta - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}},$$

а I_0 определено равенством (3.66). Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\kappa_d \left(\widehat{\sigma}^{\frac{1}{\nu - \eta - d/2}} \xi \right) |\xi|^\eta y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

Рассмотрим теперь применение теоремы 3.24 к операторам $\Lambda = D^\alpha$ и $D = (-\Delta)^{\nu/2}$. Пусть функция $\widehat{\kappa}(\cdot)$ при $1 < p < \infty$ определена равенством

$$\frac{\widehat{\kappa}(\xi)}{(1 - \widehat{\kappa}(\xi))^{p-1}} = (2\pi)^d \frac{|\xi^\alpha|^{p-2}}{|\xi|^{2\nu(p-1)}},$$

при $p = 1$

$$\widehat{\kappa}(\xi) = \min\{1, (2\pi)^d |\xi^\alpha|^{-1}\},$$

а при $p = \infty$

$$\widehat{\kappa}(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|^{2\nu}}{|\xi^\alpha|} \right)_+.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.27. Пусть $\eta = \alpha_1 + \dots + \alpha_d > 0$, $\nu > \eta + d/2$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$E_{p\infty}(D^\alpha, (-\Delta)^{\nu/2}) = \sqrt{\frac{(\nu + d(1/2 - 1/p))\widehat{B}_d \widehat{J}(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu - \eta - d/2)(\eta + d(1 - 1/p))}} \sigma,$$

где

$$\sigma = \left(\delta \sqrt{\frac{\eta + d(1 - 1/p)}{\nu - \eta - d/2}} \left(\frac{\widehat{B}_d \widehat{J}(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{\nu - \eta - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}},$$

где

$$(3.85) \quad \widehat{J} = 2 \frac{\Gamma((\alpha_1 \widehat{q}_d + 1)/2) \dots \Gamma((\alpha_d \widehat{q}_d + 1)/2)}{\Gamma((\eta \widehat{q}_d + d)/2)}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1} \left(\widehat{\kappa} \left(\sigma^{\frac{1}{\nu - \eta - d/2}} \xi \right) (i\xi)^\alpha y(\xi) \right) (t)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Величина J_2 из теоремы 3.24 в рассматриваемом случае имеет вид

$$J_2 = \int_{\Pi_{d-1}} |\cos \omega_1|^{\alpha_1 \widehat{q}_d} \dots |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}|^{\alpha_d \widehat{q}_d} J(\omega) d\omega = \widehat{J}.$$

Учитывая (3.72), получаем равенство (3.85). Теперь утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 3.24. $\square$

3.10. Точные неравенства для степеней оператора Лапласа и дробных производных

В силу равенства (3.35) для задачи (3.56) имеем

$$E_{pr}(\Lambda, D) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R}^d)}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3.10 доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.28. *Если*

$$\sup_{\substack{\|Dx(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)} \leq 1 \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} = C\delta^\alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1)$, то имеет место точное неравенство

$$(3.86) \quad \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq C \|Fx(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^\alpha \|Dx(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)}^{1-\alpha}.$$

Таким образом, каждой рассмотренной выше задаче восстановления с конкретными операторами Λ и D соответствует точное неравенство вида (3.86). Приведем ряд таких неравенств.

Положим

$$\begin{aligned} \hat{C}_d &= \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(2\pi)^d(\nu - \eta)}} \left(\frac{\pi^{d/2} \tilde{B}_d}{\Gamma(d/2)(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2 - 1/p} \right)^{\frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/2 - 1/p)}}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{B}_d = B \left(\frac{1}{1 - 2/p}, \frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(\nu - \eta)(1 - 2/p)} \right).$$

Из следствия 3.18 получаем

ТЕОРЕМА 3.29. *Пусть ν, η — целые, $\eta \geq 0$, $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|x^{(\eta)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \hat{C}_1 \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{\nu - \eta}{\nu + 1/2 - 1/p}} \|x^{(\nu)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{\eta + 1/2 - 1/p}{\nu + 1/2 - 1/p}}.$$

Из следствия 3.20 получаем

ТЕОРЕМА 3.30. *Пусть $\eta \geq 0$, $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_d \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/2 - 1/p)}} \|(-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{\nu + d(1/2 - 1/p)}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \sqrt{\frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{\eta + d(1/2 - 1/p)}} \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\eta + d(1/2 - 1/p)}{(2\pi)^d(\nu - \eta)}} \left(\frac{\tilde{B}_d J_1}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2 - 1/p} \right)^{\frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/2 - 1/p)}}, \end{aligned}$$

где

$$J_1 = 2 \frac{\Gamma((\alpha_1 q_1 + 1)/2) \dots \Gamma((\alpha_d q_1 + 1)/2)}{\Gamma((\eta q_1 + d)/2)},$$

а

$$q_1 = \frac{\nu + d(1/2 - 1/p)}{(\nu - \eta)(1/2 - 1/p)}.$$

Из следствия 3.22 получаем

ТЕОРЕМА 3.31. Пусть $\eta = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\nu > \eta$, $2 < p \leq \infty$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{K} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\nu-\eta}{\nu+d(1/2-1/p)}} \|(-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\eta+d(1/2-1/p)}{\nu+d(1/2-1/p)}}.$$

Приведем еще ряд точных неравенств для норм в $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$\begin{aligned} \widehat{K}_d &= \sqrt{\frac{(\nu + d(1/2 - 1/p))\pi^{d/2}(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}\widehat{B}_d}{\Gamma(d/2)(\nu - \eta - d/2)(\eta + d(1 - 1/p))}} \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\eta + d(1 - 1/p)}{\nu - \eta - d/2}} \left(\frac{\pi^{d/2}(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}\widehat{B}_d}{\Gamma(d/2)(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{\nu-\eta-d/2}{\nu+d(1/2-1/p)}}, \end{aligned}$$

где $\widehat{\gamma}_d$ и $\widehat{q}_d$ определены равенствами (3.80), а $\widehat{B}_d$ — равенством (3.81).

Из следствия 3.25 вытекает

ТЕОРЕМА 3.32. Пусть ν, η — целые, $\eta \geq 0$, $\nu > \eta$, $\eta + p > 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|x^{(\eta)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \widehat{K}_1 \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{\nu-\eta-1/2}{\nu+1/2-1/p}} \|x^{(\nu)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{\eta+1-1/p}{\nu+1/2-1/p}}.$$

Из следствия 3.26 вытекает

ТЕОРЕМА 3.33. Пусть $\eta \geq 0$, $\nu > \eta + d/2$, $\eta + p > 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{K}_d \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\nu-\eta-d/2}{\nu+d(1/2-1/p)}} \|(-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\eta+d(1-1/p)}{\nu+d(1/2-1/p)}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \sqrt{\frac{(\nu + d(1/2 - 1/p))\widehat{B}_d\widehat{J}(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu - \eta - d/2)(\eta + d(1 - 1/p))}} \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\eta + d(1 - 1/p)}{\nu - \eta - d/2}} \left(\frac{\widehat{B}_d\widehat{J}(2\pi)^{-d\widehat{q}_d(1+\widehat{\gamma}_d)/2}}{2(\nu + d(1/2 - 1/p))} \right)^{1/2-1/p} \right)^{\frac{\nu-\eta-d/2}{\nu+d(1/2-1/p)}}, \end{aligned}$$

где $\widehat{\gamma}_d$, $\widehat{q}_d$ и $\widehat{B}_d$ те же, что и при определении величины $\widehat{K}_d$, а $\widehat{J}$ определено равенством (3.85). Из следствия 3.27 вытекает

ТЕОРЕМА 3.34. Пусть $\eta = \alpha_1 + \dots + \alpha_d > 0$, $\nu > \eta + d/2$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда имеет место точное неравенство. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{M} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\nu-\eta-d/2}{\nu+d(1/2-1/p)}} \|(-\Delta)^{\nu/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\eta+d(1-1/p)}{\nu+d(1/2-1/p)}}.$$

3.11. Комментарии

- 3.1. Материал этого раздела взят из работы К. Ю. Осипенко [21].
- 3.2. Случай совпадения метрик изучались в работе К. Ю. Осипенко [87].
- 3.3. Теорема 3.6 доказана К. Ю. Осипенко [21]. Случай совпадения метрик для однородных весов рассматривались в работе К. Ю. Осипенко [88].
- 3.4. Материал этого раздела основан на работах К. Ю. Осипенко [21], [24].
- 3.5. Теорема 3.13 доказана в работе К. Ю. Осипенко [88].

3.6. Теорема 3.14 при $(q, p, r) \in P$ доказана в работе К. Ю. Осипенко [21]. Следствие 3.15 при $(q, p, r) \in P$ было получено в работе S. Barza, V. Burenkov, J. Pečarić, L.-E. Persson [1]. Неравенство, полученное в этом следствии является обобщением известного неравенства Карлсона. Обобщению неравенства Карлсона посвящено много работ (см., например, соответствующие ссылки в [1]). Следствие 3.16, связанное с одним из таких обобщений, было получено В. И. Левиным [51].

3.7. Задача восстановления дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье при $q = \infty$ и $p = r = 2$ была поставлена и решена в работе К. Ю. Осипенко [21]. Более общие случаи исследовались в работе К. Ю. Осипенко [88].

3.8. Теорема 3.17 доказана в работе К. Ю. Осипенко [88]. Утверждение следствия 3.18 было получено в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [63]. Результат полученный в теореме 3.19 вытекает из работы Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [61]. Следствие 3.20 получено в работе К. Ю. Осипенко [88]. Случай $p = \infty$ рассматривался ранее Е. О. Сивковой [92]. Случай $p = 2$ (теорема 3.21) изучался в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, Е. О. Сивковой [69]. Следствие 3.22 и теорема 3.23 доказаны К. Ю. Осипенко [88]. Результаты, близкие к полученным в теореме 3.23, получены в работах Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [56], [66].

3.9. Следствие 3.25 получено К. Ю. Осипенко [88]. Случаи $p = 1, 2, \infty$ рассматривались ранее в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [58] (там же рассмотрен случай, когда $p = 1$, а $\eta = 0$). Следствие 3.26 получено К. Ю. Осипенко [88]. Случай $p = \infty$ был рассмотрен ранее Е. О. Сивковой [93], а случай $p = 2$ в работе К. Ю. Осипенко [21]. Следствие 3.27 получено К. Ю. Осипенко [88].

3.10. Теорема 3.29 получена в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [57]. Теорема 3.30 доказана К. Ю. Осипенко [24]. Случай $p = 2$ получен ранее Г. Г. Магарил-Ильяева, Е. О. Сивковой [69]. Теоремы 3.31 и 3.32 доказаны К. Ю. Осипенко [24]. Случаи $p = 1, \infty$ в теореме 3.32 вытекают из результатов Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [58], а случай $p = 2$ эквивалентен неравенству Л. В. Тайкова [97]. Теорема 3.33 доказана К. Ю. Осипенко [24], частные случаи были получены в работах Е. О. Сивковой [93] ($p = \infty$) и К. Ю. Осипенко [21] ($p = 2$). Теорема 3.34 доказана К. Ю. Осипенко [24], частный случай, когда $p = 2$, был получен в работе К. Ю. Осипенко [21].

Оптимальная интерполяция

4.1. Оптимальная интерполяция на классе $W_\infty^r([-1, 1])$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $x(\tau)$, $\tau \in [-1, 1]$, по значениям функции $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$ и ее производных в системе различных точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ из отрезка $[-1, 1]$. Случаи $r \geq n$ и $r = 1$ были разобраны в 1.1. Будем считать, что информация о функции $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$, имеющаяся в нашем распоряжении, такова:

$$(4.1) \quad F_{\bar{t}}x(\cdot) = (x(t_1), \dots, x^{(\nu_1-1)}(t_1), \dots, x(t_n), \dots, x^{(\nu_n-1)}(t_n)).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu_j \leq r$, $j = 1, \dots, n$, $m = \nu_1 + \dots + \nu_n \geq r$ и $s_1 < \dots < s_{m-r}$ — узлы совершенного сплайна $s(\cdot)$, удовлетворяющего условиям

$$s^{(\nu)}(t_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для всех $\tau \in [-1, 1]$

$$(4.2) \quad E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = |s(\tau)|,$$

а единственным линейным оптимальным методом восстановления является полиномиальный сплайн $S(\cdot)$ степени $r - 1$ с узлами в точках $s_1, \dots, s_{m-r}$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$(4.3) \quad S^{(\nu)}(t_j) = x^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что существование сплайнов $s(\cdot)$ и $S(\cdot)$ доказано в 7.5.2 и 7.5.3. Докажем равенство (4.2). Из теоремы 2.4 вытекает, что

$$E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1]) \\ F_{\bar{t}}x(\cdot) = 0}} |x(\tau)|.$$

Предположим, что найдется $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$, для которой $F_{\bar{t}}\hat{x}(\cdot) = 0$, а $|\hat{x}(\tau)| > |s(\tau)|$. Положим

$$y(\cdot) = s(\cdot) - \rho \hat{x}(\cdot), \quad \rho = \frac{s(\tau)}{\hat{x}(\tau)}.$$

Тогда функция $y(\cdot)$ имеет $m + 1$ нулей с учетом кратности и, следовательно, $y^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее $m - r + 1$ перемен знака. С другой стороны, в силу того, что $|\rho| < 1$, на каждом из интервалов $(-1, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{m-r}, 1)$ функция $y^{(r)}(\cdot)$ имеет тот же знак, что и $s^{(r)}(\cdot)$, а значит, у нее ровно $m - r$ перемен знака. Полученное противоречие доказывает равенство (4.2).

Для построения оптимального метода воспользуемся теоремой 2.12. Пусть совершенный сплайн $s(\cdot)$ имеет вид

$$s(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j t^j + \frac{\alpha}{r!} \left(t^r + 2 \sum_{j=1}^{m-r} (-1)^j (t - s_j)_+^r \right).$$

Для точек $M = (b_0, \dots, b_{r-1}, u_1, \dots, u_{m-r}) \in \mathbb{R}^m$ достаточно близких к точке $M_0 = (a_0, \dots, a_{r-1}, s_1, \dots, s_{m-r}) \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим функции

$$s_M(t) = \sum_{j=0}^{r-1} b_j t^j + \frac{\alpha}{r!} \left(t^r + 2 \sum_{j=1}^{m-r} (-1)^j (t - u_j)_+^r \right).$$

Очевидно, что $s_M(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$ для всех M из достаточно малой окрестности M_0 и, кроме того, $s_{M_0}(\cdot) = s(\cdot)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_M(t)}{\partial b_j} \Big|_{M_0} &= t^j, \quad j = 0, \dots, r-1, \\ \frac{\partial s_M(t)}{\partial u_j} \Big|_{M_0} &= \frac{2\alpha(-1)^{j+1}}{(r-1)!} (t - s_j)_+^{r-1}, \quad j = 1, \dots, m-r. \end{aligned}$$

Положив

$$S(t) = \sum_{j=0}^{r-1} y_j t^j + \sum_{j=1}^{m-r} y_j (t - s_j)_+^{r-1},$$

получаем, что система (2.35) принимает вид (4.3). Поэтому оптимальным методом восстановления является значение интерполяционного сплайна $S(\cdot)$ в точке τ . $\square$

4.2. Минимизация погрешности восстановления на классе

$$W_\infty^r([-1, 1])$$

Исследуем теперь задачу о минимизации максимальной погрешности восстановления на классе $W_\infty^r([-1, 1])$ по информации (4.1), когда точка τ , в которой происходит восстановление, принадлежит отрезку $[-1, 1]$. Иначе говоря, речь идет о нахождении величины

$$E_m(W_\infty^r([-1, 1]), C([-1, 1])) = \inf_{\substack{-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1 \\ \nu_1 + \dots + \nu_n = m}} \sup_{\tau \in [-1, 1]} E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_t)$$

и точек с соответствующими кратностями, на которых достигается эта нижняя грань, называемых *оптимальными узлами интерполяции* (подобная задача рассматривалась в 1.1 для $m = r$ и $r = 1$).

Из теоремы 4.1 следует, что поставленная задача сводится к задаче о совершенных сплайнах, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной метрике. Обозначим через $\mathcal{S}_N^r$ — множество совершенных сплайнов порядка r с числом узлов, не превосходящем N .

ТЕОРЕМА 4.2. *При всех $N \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ существует совершенный сплайн $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r$ и точки $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{N+r+1} \leq 1$ такие, что*

$$(4.4) \quad \widehat{s}(\tau_j) = (-1)^j \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \quad j = 1, \dots, N+r+1.$$

При этом

$$(4.5) \quad \inf_{s(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r} \|s(\cdot)\|_{C([-1, 1])} = \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1, 1])}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathbb{S}^N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N+1} : \|\xi\| = \sum_{j=1}^{N+1} |\xi_j| = 2 \right\}.$$

Для $\xi \in \mathbb{S}^N$ определим $s_0 = -1$, $s_j = -1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_j|$, $j = 1, \dots, N+1$. Рассмотрим функцию

$$g_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-1} h_\xi(\tau) d\tau,$$

где

$$h_\xi(\tau) = \text{sign } \xi_j, \quad t \in (s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, \dots, N+1.$$

Функция $g_\xi(\cdot)$ непрерывно зависит от $\xi \in \mathbb{S}^N$ относительно нормы в $C([-1, 1])$ (см. доказательство теоремы 7.16). Пусть

$$\widehat{p}_\xi(t) = \sum_{j=0}^{N+r-1} a_j(\xi) t^j$$

— многочлен наилучшего равномерного приближения функции $g_\xi(\cdot)$ на отрезке $[-1, 1]$. Положим

$$A(\xi) = (a_r(\xi), \dots, a_{N+r-1}(\xi)).$$

Отображение $A: \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ является нечетным и непрерывным (непрерывность следует из непрерывной зависимости $g_\xi(\cdot)$ от $\xi \in \mathbb{S}^N$ и теоремы 7.2). По теореме Борсука существует $\widehat{\xi} \in \mathbb{S}^N$, для которого $A(\widehat{\xi}) = 0$. Положим

$$(4.6) \quad \widehat{s}(t) = - \sum_{j=0}^{r-1} a_j(\widehat{\xi}) t^j + g_{\widehat{\xi}}(t).$$

Очевидно, что $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r$. По теореме Чебышева найдутся $N+r+1$ точек $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{N+r+1} \leq 1$, для которых

$$\widehat{s}(\tau_j) = \sigma(-1)^j \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1, 1])}, \quad j = 1, \dots, N+r+1,$$

где $\sigma = 1$ или -1 . (Если $\sigma = -1$, то в качестве $\widehat{s}(\cdot)$ можно взять выражение в правой части (4.6) с противоположным знаком).

Докажем теперь равенство (4.5). Прежде всего заметим, что у $\widehat{s}(\cdot)$ ровно N узлов. Действительно, в силу равенств (4.4) у $\widehat{s}(\cdot)$ не менее $N+r$ нулей. Тем самым $\widehat{s}^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее N перемен знака, а, следовательно, не может иметь меньше N узлов. Обозначим узлы $\widehat{s}(\cdot)$ через $-1 < \widehat{s}_1 < \dots < \widehat{s}_N < 1$. Предположим, что нашелся совершенный сплайн $\widetilde{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r$ с узлами $-1 < \widetilde{s}_1 < \dots < \widetilde{s}_m < 1$, $m \leq N$, для которого

$$\|\widetilde{s}(\cdot)\|_{C([-1, 1])} < \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1, 1])}.$$

Будем считать, что $\text{sign } \widehat{s}^{(r)}(t) = \text{sign } \widetilde{s}^{(r)}(t)$ при $t \in (0, \min\{\widehat{s}_1, \widetilde{s}_1\})$ (в противном случае вместо $\widetilde{s}(\cdot)$ рассмотрим совершенный сплайн с противоположным знаком). Положим $R(\cdot) = \widehat{s}(\cdot) - \widetilde{s}(\cdot)$. Имеем

$$\text{sign } R(\tau_j) = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, N+r+1.$$

Поэтому у $R(\cdot)$ не менее $N+r$ нулей. Следовательно, у $R^{(r)}(\cdot)$ не менее N перемен знака. Однако поскольку $R^{(r)}(t) \equiv 0$ при $t \in (0, \min\{\widehat{s}_1, \widetilde{s}_1\})$, то у функции $R^{(r)}(\cdot)$ число перемен знака не превышает $N-1$. Полученное противоречие доказывает равенство (4.5). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$ и $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_{m-r}^r$ удовлетворяет условию (4.4) для $N = m - r$. Тогда

$$E_m(W_\infty^r([-1, 1]), C([-1, 1])) = \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1, 1])},$$

а нули совершенного сплайна $\widehat{s}(\cdot)$ являются оптимальными узлами интерполяции.

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть $r = 2$ и $m \geq 2$. Положим

$$(4.7) \quad t_j = \frac{2j - m - 1}{m - 2 + \sqrt{2}}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$s_{m2}(t) = \begin{cases} -\frac{(t - t_1)(t - t_2)}{2}, & t \in [-1, t_2], \\ (-1)^j \frac{(t - t_j)(t - t_{j+1})}{2}, & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 2, \dots, m - 2, \\ (-1)^{m-1} \frac{(t - t_{m-1})(t - t_m)}{2}, & t \in [t_{m-1}, 1]. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $s_{m2}(\cdot)$ — совершенный сплайн порядка 2 с узлами в точках $t_2, \dots, t_{m-1}$, удовлетворяющий условию

$$s_{m2}(\tau_j) = \frac{(-1)^j}{2(m - 2 + \sqrt{2})^2} = (-1)^j \|s_{m2}(\cdot)\|_{C([-1, 1])}, \quad j = 1, \dots, m + 1,$$

где $\tau_1 = -1$, $\tau_j = (t_{j-1} + t_j)/2$, $j = 2, \dots, m$ и $\tau_{m+1} = 1$. Тем самым из следствия 4.3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *При всех натуральных $m \geq 2$*

$$E_m(W_\infty^2([-1, 1]), C([-1, 1])) = \frac{1}{2(m - 2 + \sqrt{2})^2},$$

а точки (4.7) являются оптимальными узлами интерполяции.

Пусть теперь $r = 3$ и $m \geq 3$. Положим

$$(4.8) \quad t_1 = \frac{3 - \sqrt{3} - m}{m - 1}, \quad t_j = \frac{2j - m - 1}{m - 1}, \quad j = 2, \dots, m - 1, \quad t_m = -t_1,$$

$$\tau_1 = -1, \quad \tau_j = \frac{2j - 2 - m}{m - 1}, \quad j = 2, \dots, m, \quad \tau_{m+1} = 1,$$

$$s_{m3}(t) = \begin{cases} \frac{(t - t_2)^3}{6} - \frac{(t - t_2)}{2(m - 1)^2}, & t \in [\tau_1, \tau_3], \\ (-1)^j \left(\frac{(t - t_j)^3}{6} - \frac{(t - t_j)}{2(m - 1)^2} \right), & t \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \\ & j = 3, \dots, m - 2, \\ (-1)^{m-1} \left(\frac{(t - t_{m-1})^3}{6} - \frac{(t - t_{m-1})}{2(m - 1)^2} \right), & t \in [\tau_{m-1}, \tau_{m+1}]. \end{cases}$$

Несложно проверить, что $s_{m3}(\cdot)$ — совершенный сплайн порядка 3 с узлами в точках $\tau_3, \dots, \tau_{m-1}$, удовлетворяющий условию

$$s_{m3}(\tau_j) = \frac{(-1)^j}{3(m - 1)^3} = (-1)^j \|s_{m3}(\cdot)\|_{C([-1, 1])}, \quad j = 1, \dots, m + 1.$$

Тем самым из следствия 4.3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *При всех натуральных $m \geq 3$*

$$E_m(W_\infty^3([-1, 1]), C([-1, 1])) = \frac{1}{3(m - 1)^3},$$

а точки (4.8) являются оптимальными узлами интерполяции.

4.3. Оптимальная интерполяция на классе H_p

Пространством Харди $\mathcal{H}_p$ называется множество функций, аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} = \begin{cases} \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$H_p := \{f(\cdot) \in \mathcal{H}_p : \|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} \leq 1\}.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции $f(\cdot) \in H_p$ в некоторой точке $\xi \in D$ по точным значениям информационного оператора

$$(4.9) \quad I_\tau f = (f(z_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(z_n)),$$

где

$$\tau = \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix},$$

а $z_1, \dots, z_n$ — различные точки из D . Иными словами, нас интересует величина

$$(4.10) \quad E(f(\xi), H_p, I_\tau) = \inf_{\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}} \sup_{f(\cdot) \in H_p} |f(\xi) - \varphi(I_\tau f)|,$$

где $N = \sum_{j=1}^n \nu_j$. Кроме того, мы ищем оптимальный метод восстановления, т.е. метод, на котором достигается нижняя грань в (4.10).

Произведением Бляшке порядка m называется функция

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^m \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z},$$

где $|\alpha_j| < 1$, $j = 1, \dots, m$, а $|\lambda| = 1$. Нетрудно убедиться, что $|B(z)| \equiv 1$ при $|z| = 1$, и, следовательно, $\overline{B(z)} = B^{-1}(z)$ при всех $|z| = 1$. Положим

$$W(z) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{\nu_j}, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \left(\frac{z - z_s}{1 - \bar{z}_s z} \right)^{\nu_s}.$$

В дальнейшем под выражениями с p при $p = \infty$ понимаются пределы этих выражений при $p \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4.6. *При всех $1 \leq p \leq \infty$ метод*

$$(4.11) \quad f(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j),$$

где

$$c_{j\nu}(\xi, p) = \frac{W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{\nu!(\nu_j - \nu - 1)!} \left(\frac{(1 - \bar{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(\xi - z)(1 - \bar{\xi} z)^{\frac{p-2}{p}}} \right) \Big|_{z=z_j}^{(\nu_j - \nu - 1)},$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p . Для погрешности оптимального метода восстановления значений функций $f(\cdot) \in H_p$ в точке ξ по информации I_τ справедливо равенство

$$E(f(\xi), H_p, I_\tau) = \frac{|W(\xi)|}{(1 - |\xi|^2)^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(z) = \frac{W(z)}{(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}}, \quad \alpha := W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}.$$

(Здесь и далее под выражениями типа $(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}$ понимаются значения той ветви соответствующей многозначной функции, которая при $z = 0$ принимает значение 1). Очевидно, что $g(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ для любого $\xi \in D$. Пусть $1 \leq p < \infty$. Положим $d\mu(e^{i\theta}) = \frac{d\theta}{2\pi}$. Тогда для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, пользуясь теоремой Коши о вычетах (см. теорему 7.32), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \int_{|z|=1} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) d\mu(z) &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \\ &= f(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j). \end{aligned}$$

Подставив в эти равенства $f(\cdot) = g(\cdot)$, находим

$$\|g(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} = (1 - |\xi|^2)^{-1/p}.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.9.

При $p = \infty$, положив $\varphi(z) = (1 - \bar{\xi}z)^{-2}$, будем иметь

$$\begin{aligned} (4.12) \quad \alpha \int_{|z|=1} \overline{g(z)} |\varphi(z)| f(z) d\mu(z) &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)} \\ &= f(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, \infty) f^{(\nu)}(z_j). \end{aligned}$$

Остается применить теорему 2.9. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть $\nu_1 = \dots = \nu_n = 1$. Тогда при всех $1 \leq p \leq \infty$ метод

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1 - |z_j|^2}{1 - \bar{z}_j \xi} \left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - z_j \bar{\xi}} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p .

Рассмотрим еще один частный случай, когда $n = 1$, $z_1 = 0$ и $\nu_1 = \nu$ ($If_\tau = (f(0), \dots, f^{(\nu-1)}(0))$ — восстановление по тейлоровской информации. В этом случае оптимальный метод (4.11) будет иметь следующий вид:

при $p = \infty$

$$(4.13) \quad f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\xi^j}{j!} (1 - |\xi|^{2(\nu-j)}) f^{(j)}(0);$$

при $p = 2$

$$f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0);$$

при $p = 1$

$$f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{\nu-2} \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{\xi^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{1}{1 - |\xi|^2} f^{(\nu-1)}(0).$$

Кроме того, при всех $1 \leq p \leq \infty$

$$e(f(\xi), H_p, I_\tau) = \frac{|\xi|^\nu}{(1 - |\xi|^2)^{1/p}}.$$

4.4. Минимизация погрешности восстановления на классе H_p

В 4.2 (см. также 1.1) рассматривалась задача о минимизации максимальной погрешности восстановления за счет выбора узлов интерполяции. Сформулируем аналогичную задачу для класса H_p . Пусть $R(\xi) = E(f(\xi), H_p, I_\tau)$ и X — линейное нормированное пространство такое, что $R(\cdot) \in X$. Положим

$$E_n(H_p, X) = \inf_{z_1, \dots, z_n \in D} \|R(\cdot)\|_X,$$

где

$$I_\tau f = (f(z_1), \dots, f(z_n))$$

(при совпадении точек считаем, что заданы значения функции и ее производных до соответствующего порядка). Узлы, на которых достигается нижняя грань, будем называть *оптимальными*.

Введем следующие обозначения:

$$T_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}, \quad 0 < \rho < 1, \quad d\sigma_\rho(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

Через $\mathcal{B}_n$ обозначим множество произведений Бляшке порядка n .

ЛЕММА 4.8. Для всех $B(\cdot) \in \mathcal{B}_n$

$$\int_{T_\rho} |B(z)| d\sigma_\rho(z) \geq \rho^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq m \leq n$,

$$B(z) = z^m \prod_{j=1}^{n-m} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

$|z_j| < \rho$, $j = 1, \dots, s$, $|z_j| \geq \rho$, $j = s+1, \dots, n-m$. По неравенству Йенсена (теорема 7.46)

$$(4.14) \quad \int_{T_\rho} |B(z)| d\sigma_\rho(z) \geq \exp \left(\int_{T_\rho} \ln |B(z)| d\sigma_\rho(z) \right).$$

Из формулы Йенсена (7.21) получаем

$$\begin{aligned} \int_{T_\rho} \ln |B(z)| d\sigma_\rho(z) &= m \ln \rho + \sum_{j=1}^{n-m} \ln |z_j| + \sum_{j=1}^s \ln \frac{\rho}{|z_j|} \\ &= (m+s) \ln \rho + \sum_{j=s+1}^{n-m} \ln |z_j| \geq n \ln \rho. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (4.14), получаем, доказываемое неравенство. $\square$

ТЕОРЕМА 4.9. Для всех $1 \leq p, q \leq \infty$

$$E_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) = \frac{\rho^n}{(1 - \rho^2)^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$E(f(\xi), H_p, I_\tau) = \frac{|B(\xi)|}{(1 - |\xi|^2)^{1/p}}.$$

Поэтому

$$E_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) = \frac{1}{(1 - \rho^2)^{1/p}} \inf_{B(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B(\cdot)\|_{L_q(T_\rho, \sigma_\rho)}.$$

Учитывая лемму 4.8, получаем

$$(4.15) \quad \|B(\cdot)\|_{L_q(T_\rho, \sigma_\rho)} \geq \|B(\cdot)\|_{L_1(T_\rho, \sigma_\rho)} \geq \rho^n.$$

Тем самым

$$E_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \geq \frac{\rho^n}{(1 - \rho^2)^{1/p}}.$$

С другой стороны,

$$E_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \leq \frac{1}{(1 - \rho^2)^{1/p}} \|z^n\|_{L_q(T_\rho, \sigma_\rho)} = \frac{\rho^n}{(1 - \rho^2)^{1/p}}.$$

□

Рассмотрим теперь задачу о наилучшем выборе точек интерполяции на отрезке $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, $0 < k < 1$, для класса H_∞ .

ТЕОРЕМА 4.10. *Имеет место равенство*

$$E_n(H_\infty, C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])) = \sqrt{\lambda},$$

где λ определено равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K};$$

здесь K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$, а Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ и $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$. При этом узлы

$$z_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(-K + \frac{2j-1}{n} K, k \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.6 вытекает, что

$$E_n(H_\infty, C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])) = \inf_{B(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B(\cdot)\|_{C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])}.$$

Покажем, что нижнюю грань достаточно искать среди произведений Бляшке с вещественными нулями, находящимися на отрезке $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Пусть один из множителей имеет вид

$$\frac{x - w}{1 - wx}, \quad w = \alpha + i\beta.$$

Тогда

$$\left| \frac{x - w}{1 - wx} \right|^2 - \left| \frac{x - \alpha}{1 - \alpha x} \right|^2 = \frac{\beta^2(1 - x^2)((1 - \alpha x)^2 + 1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha x)^2((1 - \alpha x)^2 + \beta^2 x^2)} \geq 0.$$

Тем самым

$$\left| \frac{x - w}{1 - wx} \right| \geq \left| \frac{x - \alpha}{1 - \alpha x} \right|.$$

Если $x \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, а $|\alpha| \geq \sqrt{k}$, то несложно убедиться, что

$$\left| \frac{x - \alpha}{1 - \alpha x} \right| \geq \left| \frac{x - \sqrt{k} \operatorname{sign} \alpha}{1 - x\sqrt{k} \operatorname{sign} \alpha} \right|.$$

Пусть $B(\cdot)$ — произведение Бляшке с вещественными нулями из отрезка $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Докажем, что

$$(4.16) \quad \|B(\cdot)\|_{C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])} \geq \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])},$$

где $Z_n(\cdot, k)$ — произведение Бляшке–Золотарева (см. п. 8.5). Предположим противное. Тогда существуют $\alpha_j \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, $j = 1, \dots, n$, такие, что для произведения Бляшке

$$B(x) = \prod_{j=1}^n \frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j x}$$

выполняется неравенство

$$\|B(\cdot)\|_{C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])} < \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])}.$$

В силу (8.16) имеем

$$(-1)^j (Z_n(\xi_j, k) - B(\xi_j)) > 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Тем самым разность $Z_n(\cdot, k) - B(\cdot)$ имеет не менее n нулей на отрезке $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Сама эта разность имеет вид

$$(4.17) \quad Z_n(x, k) - B(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - \xi_j)(1 - \alpha_j x) - \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)(1 - \xi_j x)}{\prod_{j=1}^n (1 - \xi_j x)(1 - \alpha_j x)}.$$

Легко видеть, что если она обращается в нуль в точке $w \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ и $w \neq 0$, то она обращается в нуль и в точке $1/w$. Обозначим через $P_{2n}(\cdot)$ многочлен степени $2n$, стоящий в числителе в правой части (4.17). Предположим, что все n нулей разности $Z_n(\cdot, k) - B(\cdot)$ отличны от нуля. Тогда у $P_{2n}(\cdot)$ будет не менее $2n$ нулей и, кроме того, этот многочлен еще имеет нуль при $x = 1$. Приходим к противоречию. Пусть теперь среди n нулей разности есть один нулевой. Он может быть только на одном отрезке, поэтому имеется не менее $n - 1$, отличных от нуля. И еще $n - 1$ обратных к ним. Кроме того, по-прежнему нуль $x = 1$. Итого не менее $2n$. Но из условия $P_{2n}(0) = 0$ следует, что коэффициент при старшей степени равен нулю и поэтому степень многочлена равна $2n - 1$. Снова приходим к противоречию. $\square$

Если рассмотреть задачу о выборе наилучшим образом узлов для восстановления функции не в одной точке, а целиком функции, как элементе некоторого пространства, то возникает несколько иная постановка. Пусть X — линейное нормированное пространство и $H_p \subset X$. Положим

$$s_n(H_p, X) = \inf_{z_1, \dots, z_n \in D} \inf_{\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow X} \sup_{f(\cdot) \in H_p} \|f(\cdot) - \varphi(I_\tau f)\|_X,$$

где, как и раньше,

$$I_\tau f = (f(z_1), \dots, f(z_n)).$$

Узлы, на которых достигается нижняя грань, так же, как и для задачи о нахождении величины $E_n(H_p, X)$, будем называть *оптимальными*.

ТЕОРЕМА 4.11. Для всех $1 \leq q \leq p \leq \infty$

$$s_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) = \rho^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 следует, что

$$(4.18) \quad \inf_{\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow X} \sup_{f(\cdot) \in H_p} \|f(\cdot) - \varphi(I_\tau f)\|_X \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_p \\ I_\tau f = 0}} \|f(\cdot)\|_X \geq \|B_\tau(\cdot)\|_X,$$

где

$$B_\tau(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}.$$

Тем самым

$$s_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \geq \inf_{B(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B(\cdot)\|_{L_q(T_\rho, \sigma_\rho)}.$$

Учитывая (4.15), получаем

$$s_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \geq \rho^n.$$

Так как $H_p \subset H_q$ при всех $1 \leq q < p \leq \infty$, то

$$s_n(H_p, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \leq s_n(H_q, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)).$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$(4.19) \quad s_n(H_q, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \leq \rho^n.$$

Положим

$$p_f(\xi) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\xi^j}{j!} (1 - |\xi|^{2(\nu-j)}) f^{(j)}(0).$$

При доказательстве теоремы 4.6 (см. (4.12) и (4.13)) было доказано равенство

$$f(\xi) - p_f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\xi^n (1 - |\xi|^2) f(z) dz}{z^n (z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)}.$$

Положив $\xi = \rho e^{it}$, получаем

$$f(\rho e^{it}) - p_f(\rho e^{it}) = \frac{\rho^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in(t-\theta)} (1 - \rho^2)}{|1 - \rho e^{i(t-\theta)}|^2} f(e^{i\theta}) d\theta = \rho^n (P_\rho * F)(t),$$

где

$$P_\rho(\theta) = \frac{e^{in\theta} (1 - \rho^2)}{2\pi |1 - \rho e^{i\theta}|^2}, \quad F(\theta) = f(e^{i\theta}).$$

С помощью неравенства Юнга (7.45) получаем оценку

$$s_n(H_q, L_q(T_\rho, \sigma_\rho)) \leq \sup_{f(\cdot) \in H_q} \|f(\cdot) - p_f(\cdot)\|_{L_q(T_\rho, \sigma_\rho)} \leq \rho^n \|P_\rho(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}.$$

В силу того, что

$$|P_\rho(\theta)| = \frac{1}{2\pi} P(\rho, \theta),$$

где $P(\cdot, \cdot)$ — ядро Пуассона, имеем

$$\|P_\rho(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = 1.$$

Тем самым оценка (4.19) доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.12. В обозначениях теоремы 4.10 имеет место равенство

$$s_n(H_\infty, C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])) = \sqrt{\lambda}.$$

При этом узлы

$$z_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(-K + \frac{2j-1}{n} K, k \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.18), учитывая (4.16) получаем

$$s_n(H_\infty, C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])) \geq \inf_{B(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B(\cdot)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} = \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} = \sqrt{\lambda}.$$

С другой стороны, из теоремы 4.6 (см. также следствие 4.7) следует, что для всех $f(\cdot) \in H_\infty$ и для всех $\xi \in D$

$$|f(\xi) - \hat{p}_f(\xi)| \leq |Z_n(\xi, k)|,$$

где

$$\widehat{p}_f(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |\xi|^2)}{|1 - z_j \xi|^2} f(z_j), \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \frac{z - z_s}{1 - \overline{z_s} z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} s_n(H_\infty, C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])) &\leq \sup_{f(\cdot) \in H_\infty} \|f(\cdot) - \widehat{p}_f(\cdot)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} \\ &\leq \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} = \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

□

4.5. Оптимальная интерполяция на классах Харди–Соболева H_∞^r

Пространством Харди–Соболева $\mathcal{H}_\infty^r$ будем называть множество функций, аналитических в единичном круге D , удовлетворяющих условию

$$\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \infty.$$

Через H_∞^r обозначим класс функций из $\mathcal{H}_\infty^r$, для которых

$$\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 1.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(x)$, $x \in (-1, 1)$, на классе H_∞^r по значениям информационного оператора

$$I_\tau f = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+r})),$$

где $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$. В случае $r = 0$ решение рассматриваемой задачи было получено в п. 4.3, поэтому будем считать, что $r \geq 1$. Для функций $f(\cdot)$, аналитических в единичном круге, положим

$$(T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z - \zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta) d\zeta.$$

Очевидно, что $(T_r f)^{(r)}(\cdot) = f(\cdot)$, и, следовательно, $T_r f(\cdot) \in H_\infty^r$ при всех $f(\cdot) \in H_\infty$.

ТЕОРЕМА 4.13. *При всех $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$ найдутся такие $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$, что для функции $f_0(\cdot) \in H_\infty^r$, имеющей вид*

$$(4.20) \quad f_0(\cdot) = P_{r-1}(\cdot) + (T_r B_0)(\cdot),$$

где $P_{r-1}(\cdot)$ — полином степени $r-1$, вещественный на вещественной оси, а $B_0(\cdot)$ — произведение Бляшке порядка n

$$B_0(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z},$$

выполняются равенства

$$(4.21) \quad f_0(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n+r.$$

Кроме того, при всех $x \in (-1, 1)$

$$(4.22) \quad \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r \\ f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{n+r}) = 0}} |f(x)| = |f_0(x)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathbb{S}^n = \{ \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi_0| + |\xi_1| + \dots + |\xi_n| = 1 \}.$$

В теореме 7.35 было построено нечетное отображение $\eta(\cdot)$, которое каждой точке из $\mathbb{C}^n$ ставит в соответствие произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси и непрерывное в $C(E)$ для любого компакта $E \subset D$. Пусть $B_\xi(\cdot) = \eta(\xi)$. Найдем полином $P_\xi(\cdot)$ из условий

$$P_\xi(\tau_j) = (T_r B_\xi)(\tau_j), \quad j = 1, \dots, r.$$

Положим

$$g_\xi(\cdot) = P_\xi(\cdot) + (T_r B_\xi)(\cdot).$$

Определим отображение $\omega: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством

$$\omega(\xi) = (g_\xi(\tau_{r+1}), \dots, g_\xi(\tau_n)).$$

Отображение $\omega(\cdot)$ нечетное и непрерывное. Следовательно, по теореме Борсука существует $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^n$, для которого $\omega(\hat{\xi}) = 0$. Положим $f_0(\cdot) = g_{\hat{\xi}}(\cdot)$. Для функции $f_0(\cdot)$ выполнены равенства (4.21). Введя обозначения $P_{r-1}(\cdot) = P_{\hat{\xi}}(\cdot)$, $B_0(\cdot) = B_{\hat{\xi}}(\cdot)$, придем к виду (4.20). Произведение Бляшке $B_0(\cdot)$ вещественно на вещественной оси. По теореме Ролля функция $f_0^{(r)}(\cdot)$ в интервале (τ_1, τ_{n+r}) имеет не менее n нулей. Но $f_0^{(r)}(\cdot) = B_0(\cdot)$. Поэтому имеет место равенство

$$B_0(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

где $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = -1$, то умножив $f_0(\cdot)$ на -1 , получим функцию, удовлетворяющую тем же условиям (4.21) и имеющую вид (4.20).

Докажем равенство (4.22). Предположим, что для некоторого $x \in (-1, 1)$ нашлась функция $f(\cdot) \in H_\infty^r$, удовлетворяющая условию (4.21), такая, что $|f(x)| > |f_0(x)|$. Естественно считать, что $x \neq \tau_j$, $j = 1, \dots, n+r$, в противном случае утверждение тривиально. Без ограничения общности можно считать, что $f(x) > 0$. Через $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ обозначим класс функций из H_∞^r , вещественных в интервале $(-1, 1)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z) + \overline{f(\bar{z})}}{2}.$$

Функция $f_1(\cdot) \in H_\infty^{r, \mathbb{R}}$, удовлетворяет условию (4.21) и для нее $f_1(x) > |f_0(x)|$. Положим

$$F(\cdot) = f_0(\cdot) - \rho f_1(\cdot), \quad \rho = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}.$$

Тогда у функции $F(\cdot)$ не менее $n+r+1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. По теореме Ролля функция $F^{(r)}(\cdot) = B_0(\cdot) - \rho f_1^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее $n+1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. На границе единичного круга имеем

$$|F^{(r)}(e^{i\theta}) - B_0(e^{i\theta})| = |\rho f_1^{(r)}(e^{i\theta})| \leq |\rho| < 1 = |B_0(e^{i\theta})|.$$

По теореме Руше у функций $B_0(\cdot)$ и $F^{(r)}(\cdot)$ должно быть одинаковое число нулей в единичном круге D . Так как у $B_0(\cdot)$ ровно n нулей, приходим к противоречию. $\square$

Из равенства (2.33) сразу следует, что для погрешности оптимального восстановления значения $f(x)$ на классе H_∞^r и $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ справедливо равенство

$$E(f(x), H_\infty^r, I_\tau) = E(f(x), H_\infty^{r, \mathbb{R}}, I_\tau) = |f_0(x)|.$$

Оптимальный метод восстановления может быть получен с помощью теоремы 2.11.

ТЕОРЕМА 4.14. При всех $x \in (-1, 1)$ метод

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{n+r} C_j(x) f(\tau_j),$$

в котором $C_1(x), \dots, C_{n+r}(x)$ являются решениями системы

$$(4.23) \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_{n+r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{r-1} & \dots & \tau_{n+r}^{r-1} \\ (T_r g_1)(\tau_1) & \dots & (T_r g_1)(\tau_{n+r}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (T_r g_n)(\tau_1) & \dots & (T_r g_n)(\tau_{n+r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \vdots \\ C_{n+r}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{r-1} \\ (T_r g_1)(x) \\ \vdots \\ (T_r g_n)(x) \end{pmatrix},$$

где

$$g_m(z) = B_0(z) \frac{1 - z^2}{(z - z_m)(1 - z_m z)}, \quad m = 1, \dots, n,$$

а функция $B_0(\cdot)$ с нулями z_m определена в теореме 4.13, является оптимальным на классе H_∞^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $P = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+r}$ положим

$$f_P(z) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + (T_r B_P)(z),$$

где

$$B_P(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - t_j}{1 - t_j z}.$$

Пусть полином $P_{r-1}(\cdot)$ из теоремы 4.13 имеет вид

$$P_{r-1}(z) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^0 z^j.$$

При $P = P_0 = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_{r-1}^0, z_1, \dots, z_n)$ функция $f_{P_0}(\cdot)$ является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения $f(x)$ на классах H_∞^r и $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$. Положим $\tau_0 = x$,

$$\varphi_j(P) = f_P(\tau_j), \quad j = 0, \dots, n+r.$$

Имеем при всех $j = 0, \dots, n+r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial a_m} &= \tau_j^m, \quad m = 0, \dots, r-1, \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} &= (T_r g_m)(\tau_j), \quad m = 1, \dots, n+r. \end{aligned}$$

Для получения оптимального метода на классе $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ остается применить теорему 2.11, предварительно проверив, что определитель системы (4.23) отличен от нуля. Если предположить, что этот определитель равен нулю, то найдутся $C_1, \dots, C_{n+r}$, не все равные нулю, такие, что функция

$$F(z) = \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} z^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (T_r g_j)(z)$$

обращается в нуль в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$. Тогда по теореме Ролля найдутся точки $\tau_1 < x_1 < \dots < x_n < \tau_{n+r}$, в которых $F^{(r)}(\cdot)$ обращается в нуль. Тем самым

$$F^{(r)}(x_m) = \sum_{j=1}^n C_{j+r} g_j(x_m) = 0, \quad m = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_{j+r} g_j(z) &= (1-z^2) B_0(z) \sum_{j=1}^n \frac{C_{j+r}}{(z-z_j)(1-z_j z)} \\ &= (1-z^2) B_0(z) \frac{Q_{2n-2}(z)}{\prod_{j=1}^n (z-z_j)(1-z_j z)} = (1-z^2) \frac{Q_{2n-2}(z)}{\prod_{j=1}^n (1-z_j z)^2}. \end{aligned}$$

Тем самым $Q_{2n-2}(x_m) = 0$, $m = 1, \dots, n$. В силу равенства

$$\sum_{j=1}^n \frac{C_{j+r}}{\left(\frac{1}{z} - z_j\right) \left(1 - z_j \frac{1}{z}\right)} = \frac{Q_{2n-2}\left(\frac{1}{z}\right)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{z} - z_j\right) \left(1 - z_j \frac{1}{z}\right)}$$

получаем

$$Q_{2n-2}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{Q_{2n-2}(z)}{z^{2n-2}}.$$

Таким образом, если $x_m \neq 0$, то $Q_{2n-2}(1/x_m) = 0$. Так как все точки $x_1, \dots, x_n$ различные, то найдутся по крайней мере еще $n-1$ нулей полинома $Q_{2n-2}(\cdot)$. Отсюда следует, что $Q_{2n-2}(z) \equiv 0$, т.е. $C_{r+1} = \dots = C_{n+r} = 0$. Отсюда вытекает, что и $C_1 = \dots = C_r = 0$.

Докажем, что построенный метод (обозначим его через $\varphi(\cdot)$) является оптимальным на классе H_∞^r . Предположим, что найдется функция $f_0 \in H_\infty^r$ и $x \in (-1, 1)$, для которых

$$(4.24) \quad |f_0(x) - \varphi(I_\tau f_0)| > E(f(x), H_\infty^r, I_\tau).$$

Тогда для функции $\overline{f_0(\bar{z})} \in H_\infty^r$ также выполнено неравенство (4.24). Без ограничения общности можно считать, что $f_0(x) - \varphi(I_\tau f_0) > 0$. Следовательно, для функции

$$g(z) := \frac{f_0(z) + \overline{f_0(\bar{z})}}{2} \in H_\infty^{r, \mathbb{R}}$$

имеем

$$g(x) - \varphi(I_\tau g) > E(f(x), H_\infty^r, I_\tau) = E(f(x), H_\infty^{r, \mathbb{R}}, I_\tau),$$

что невозможно в силу оптимальности метода $\varphi(\cdot)$ на классе $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$. $\square$

Обозначим матрицу системы (4.23) через A . Тогда оптимальный метод, построенный в теореме 4.14, будет иметь вид

$$f(x) \approx (A^{-1} \mathbf{G}(x), I_\tau f) = (\mathbf{G}(x), (A^*)^{-1} I_\tau f),$$

где

$$\mathbf{G}(x) = (1, x, \dots, x^{r-1}, (T_r g_1)(x), \dots, (T_r g_n)(x)),$$

а A^* — матрица, сопряженная к A (здесь $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+r}$). Тем самым оптимальный метод может быть записан в виде

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} x^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (T_r g_j)(x),$$

где $C_1, \dots, C_{n+r}$ — решения системы

$$\sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} \tau_m^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (Tg_j)(\tau_m) = f(\tau_m), \quad m = 1, \dots, n+r.$$

Для фиксированных $-1 < z_1 < \dots < z_n < 1$ положим

$$X_{n+r}^z := \text{span}\{1, z, \dots, z^{r-1}, (T_r g_1)(z), \dots, (T_r g_n)(z)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.15. Пусть $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$, а $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$ — определены в теореме 4.13. Тогда функция $g(x) \in X_{n+r}^z$, интерполирующая $f(\cdot)$ в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$, является оптимальным методом восстановления значения $f(x)$, $x \in (-1, 1)$, на классе H_∞^r по значениям в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$.

Исследуем теперь задачу о минимизации максимальной погрешности восстановления на классе H_∞^r по информации $I_\tau f$, когда точка x , в которой происходит восстановление, принадлежит отрезку $[a, b] \subset (-1, 1)$. Иначе говоря, речь идет о нахождении величины

$$E_{n+r}(H_\infty^r, C([a, b])) = \inf_{-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1} \sup_{x \in [a, b]} E(f(x), H_\infty^r, I_\tau)$$

и точек, на которых достигается эта нижняя грань, называемых *оптимальными узлами интерполяции*.

Обозначим через $\mathcal{A}_n^r$ — множество функций вида

$$(4.25) \quad f(\cdot) = P_{r-1}(\cdot) + (T_r B)(\cdot),$$

где $P_{r-1}(\cdot)$ — полином степени не выше $r-1$, вещественный на вещественной оси, а $B(\cdot)$ — произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси. Функции вида (4.25) являются аналогами совершенных сплайнов в задаче оптимальной интерполяции функций из класса $W_\infty^r([-1, 1])$.

ТЕОРЕМА 4.16. При всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ существует функция $\hat{f}(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$ и точки $a \leq t_1 < \dots < t_{n+r+1} \leq b$ такие, что

$$(4.26) \quad \hat{f}(t_j) = (-1)^j \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])} \quad j = 1, \dots, n+r+1.$$

При этом

$$(4.27) \quad \inf_{f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r} \|f(\cdot)\|_{C([a, b])} = \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 7.35 было построено нечетное отображение $\eta(\cdot)$, которое каждой точке из $\mathbb{C}^n$ ставит в соответствие произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси и непрерывное в $C(E)$ для любого компакта $E \subset D$. Пусть $B_\xi(\cdot) = \eta(\xi)$. Положим

$$g_\xi(\cdot) = (T_r B_\xi)(\cdot).$$

Пусть

$$\hat{p}_\xi(t) = \sum_{j=0}^{n+r-1} a_j(\xi) t^j$$

— многочлен наилучшего равномерного приближения функции $g_\xi(\cdot)$ на отрезке $[a, b]$. Положим

$$A(\xi) = (a_r(\xi), \dots, a_{n+r-1}(\xi)).$$

Отображение $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является нечетным и непрерывным (непрерывность следует из непрерывной зависимости $g_\xi(\cdot)$ от $\xi \in \mathbb{S}^n$ и теоремы 7.2). По теореме Борсука существует $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^n$, для которого $A(\hat{\xi}) = 0$. Положим

$$(4.28) \quad \hat{f}(t) = - \sum_{j=0}^{r-1} a_j(\hat{\xi}) t^j + g_{\hat{\xi}}(t).$$

Очевидно, что $\hat{f}(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$. По теореме Чебышева найдутся $n + r + 1$ точек $a \leq t_1 < \dots < t_{n+r+1} \leq b$, для которых

$$(4.29) \quad \hat{f}(t_j) = \sigma(-1)^j \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a,b])}, \quad j = 1, \dots, n + r + 1,$$

где $\sigma = 1$ или -1 . (Если $\sigma = -1$, то в качестве $\hat{f}(\cdot)$ можно взять выражение в правой части (4.28) с противоположным знаком). Из (4.29) вытекает, что у $\hat{f}(\cdot)$ не менее $n + r$ нулей в интервале (a, b) . По теореме Ролля у $\hat{f}^{(r)}(\cdot)$ тогда не менее n нулей в интервале (a, b) . Но $\hat{f}^{(r)}(\cdot) = \hat{B}(\cdot)$, а $\hat{B}(\cdot)$ — произведение Бляшке порядка не выше n . Следовательно,

$$\hat{f}^{(r)}(z) = \hat{B}(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z},$$

где $\lambda = \pm 1$.

Предположим, что нашлась функция $f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$, для которой

$$\|f(\cdot)\|_{C([a,b])} < \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a,b])}.$$

Рассмотрим функцию $R(\cdot) = \hat{f}(\cdot) - f(\cdot)$. Имеем

$$\text{sign } R(t_j) = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, n + r + 1.$$

Тогда по теореме Ролля функция $R^{(r)}(\cdot) = \hat{B}(\cdot) - B(\cdot)$, где

$$B(z) = \mu \prod_{j=1}^k \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad k \leq n, \quad \mu = \pm 1,$$

и, кроме того, вещественна на вещественной оси, имеет не менее n различных нулей в интервале (a, b) . Можно считать, что $\mu = \lambda$ (иначе можно рассмотреть вместо $f(\cdot)$ функцию $-f(\cdot)$). Тогда $\hat{B}(\pm 1) - B(\pm 1) = 0$. Следовательно, разность $\hat{B}(\cdot) - B(\cdot)$ может быть представлена в виде

$$\hat{B}(z) - B(z) = (1 - z^2) \frac{Q(z)}{\prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j z) \prod_{j=1}^k (1 - \beta_j z)},$$

где $Q(\cdot)$ полином степени не выше $2n - 2$. В силу того, что для любого вещественного $z \neq 0$ справедливы равенства

$$\hat{B}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\hat{B}(z)}, \quad B\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{B(z)},$$

кроме n нулей в интервале (a, b) у разности $\hat{B}(\cdot) - B(\cdot)$ найдется еще не менее $n - 1$ вещественных нулей вне отрезка $[-1, 1]$. Тем самым у многочлена $Q(\cdot)$, степень которого не выше $2n - 2$ нашлось не менее $2n - 1$ нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость (4.27). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.17. При всех $n, r \in \mathbb{N}$ и $\hat{f}(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$ удовлетворяет условию (4.26). Тогда

$$E_{n+r}(H_\infty^r, C([a, b])) = \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])},$$

а нули $\hat{f}(\cdot)$ являются оптимальными узлами интерполяции.

4.6. Интерполяция по значениям в бесконечном числе точек

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $f(\cdot) \in H_p$ по ее значениям в бесконечном числе точек. Пусть информационный оператор имеет следующий вид

$$(4.30) \quad If = \left\{ f(z_j), \dots, f^{(\nu_j-1)}(z_j) \right\}_{j=-\infty}^{+\infty},$$

где $z_j \in (-1, 1)$.

Чтобы получить интегральное представление (2.30), используемое для построения оптимального метода восстановления, нам потребуется вспомогательная лемма.

Бесконечным произведением Бляшке называется произведение

$$(4.31) \quad B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} -\frac{\bar{z}_n}{|z_n|} \cdot \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$

где $z_n \in D$ и $m \in \mathbb{N}$. В теореме 7.24 доказано, что если $z_n \in D$ удовлетворяют условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty,$$

то произведение (4.31) сходится в D , $B(z) \in \mathcal{H}_{\infty}$ и $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду.

ЛЕММА 4.18. Пусть даны последовательности $\{z_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $\{\nu_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ такие, что $-1 < z_j < z_{j+1} < 1$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, \pm 1, \dots$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu_j (1 - |z_j|) < \infty,$$

и для

$$W(z) = \prod_{j=-\infty}^{\infty} \left(-\operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{\nu_j}$$

(считается, что $\operatorname{sign} 0 = -1$) существуют $\alpha_j \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 0, \pm 1, \dots$, для которых $|W(\alpha_j)| \geq c > 0$. Тогда для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{W(z)} dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-\operatorname{sign} z_j)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left(\frac{f(z)(1 - \bar{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right) \Big|_{z=z_j}^{(\nu_j-1)},$$

где

$$\omega_j(z) := \prod_{m \neq j} \left(-\operatorname{sign} z_m \frac{z - z_m}{1 - \bar{z}_m z} \right)^{\nu_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_1$ для всех $1 < p \leq \infty$, то достаточно рассмотреть случай, когда $p = 1$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\varphi \in (0, \pi/2)$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} |f(e^{i\theta})| d\theta < \varepsilon.$$

В силу равенства (см. (7.24))

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0$$

существует такое $r_1 \in (0, 1)$, для которого при всех $r \in (r_1, 1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| d\theta < \varepsilon.$$

Тем самым при всех $r, r^* \in (r_1, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}
 (4.32) \quad & \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} |f(r^*e^{i\theta})| d\theta \\
 & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| d\theta \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} |f(e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} |f(r^*e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| d\theta < 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Из неравенства Фейера–Рисса (см. теорему 7.36) следует существование $r_2 \in (0, 1)$, для которого

$$(4.33) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{r_2}^1 |f(xe^{i\theta})| dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{-1+r_2} |f(xe^{i\theta})| dx < \varepsilon$$

при $\theta = \pm\varphi$. Пусть

$$r_0 := \max\{r_1, r_2, (1 - \sin \varphi)/(1 + \sin \varphi)\}, \quad N := \max\{|n| : \alpha_n \in [-r_0, r_0]\}.$$

Будем для определенности считать, что $z_1 < 0 \leq z_0$. Положим для $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \{z \in D : |z| > \alpha_n, |\arg z| < \varphi\}, \\
 S_{-n} &= \{z \in D : |z| > |\alpha_{-n}|, \pi - \varphi < \arg z < \pi + \arg z\}, \\
 \Omega_n &= D \setminus (S_{-n} \cup S_n), \quad \Gamma_n = \partial D \cap (\partial S_{-n} \cup \partial S_n), \\
 \gamma_{-n} &= D \cap \partial S_{-n}, \quad \gamma_n = D \cap \partial S_n.
 \end{aligned}$$

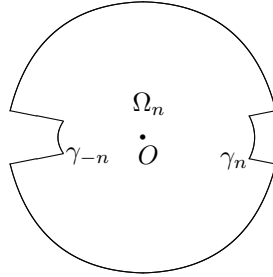


Рис. 4.6.1

Имеем

$$\begin{aligned}
 R_n &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{W(z)} dz - \sum_{j=-n}^n \frac{(-\operatorname{sign} z_j)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left(\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right) \Big|_{z=z_j} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{W(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega_n} \frac{f(z)}{W(z)} dz \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{W(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{-n} \cup \gamma_n} \frac{f(z)}{W(z)} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} |f(z)| |dz| \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{-n} \cup \gamma_n} \left| \frac{f(z)}{W(z)} \right| |dz| < \varepsilon + \frac{b_n}{2\pi} \int_{\gamma_n} |f(z)| |dz| + \frac{b_{-n}}{2\pi} \int_{\gamma_{-n}} |f(z)| |dz|,
 \end{aligned}$$

где

$$b_n = \sup_{z \in \gamma_n} |W(z)|^{-1}, \quad b_{-n} = \sup_{z \in \gamma_{-n}} |W(z)|^{-1}.$$

Множество точек, для которых

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right| < \left| \frac{\alpha_n - z_j}{1 - z_j \alpha_n} \right|,$$

является кругом в D с центром на вещественной оси. Пусть $n > N$. При $j \geq n + 1$ этот круг располагается правее точки α_n , его радиус меньше $(1 - \alpha_n)/2$, следовательно, он лежит в конусе $|\arg z| < \varphi$. Поэтому весь круг лежит в S_n . Если $0 \leq j \leq n$, то рассматриваемый круг лежит левее точки α_n , а точка $-\alpha_n$ находится, как легко проверить, вне круга. Тем самым радиус круга меньше α_n , а его центр находится между 0 и α_n . Следовательно, в этом случае круг находится внутри Ω_n . Таким образом, доказано, что для всех $z \in \gamma_n$ and $j \geq 0$

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right| \geq \left| \frac{\alpha_n - z_j}{1 - z_j \alpha_n} \right|.$$

Отсюда для всех $z \in \gamma_n$

$$(4.34) \quad |W(z)| \geq \prod_{j=-1}^{-\infty} \left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right|^{\nu_j} \prod_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\alpha_n - z_j}{1 - z_j \alpha_n} \right|^{\nu_j} \geq |W(\alpha_n)| \prod_{j=-1}^{-\infty} \left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right|^{\nu_j}.$$

При $j \leq -1$ рассмотрим круг

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right| < |z_j|.$$

Несложно убедиться, что он лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Следовательно, для всех $j \leq -1$

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right| < |z_j|.$$

Возвращаясь к оценке (4.34), получаем

$$|W(z)| \geq |W(\alpha_n)| \prod_{j=-1}^{-\infty} |z_j|^{\nu_j} \geq c \prod_{j=-1}^{-\infty} |z_j|^{\nu_j} = c_1.$$

Таким образом, $b_n \leq c_1^{-1}$. Аналогичные рассуждения для $z \in \gamma_{-n}$ дают

$$|W(z)| \geq |W(\alpha_{-n})| \prod_{j=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right|^{\nu_j} \geq c \left| \frac{z - z_0}{1 - z_0 z} \right|^{\nu_0} \prod_{j=1}^{\infty} |z_j|^{\nu_j}.$$

В силу того, что круг

$$\left| \frac{z - z_0}{1 - z_0 z} \right| < \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - z_0 z_1} \right|$$

находится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > z_1$, получаем

$$|W(z)| \geq c \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - z_0 z_1} \right|^{\nu_0} \prod_{j=1}^{\infty} |z_j|^{\nu_j} = c_2.$$

Отсюда $b_{-n} \leq c_2^{-1}$. Учитывая полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned} R_n &< \varepsilon + \frac{1}{2\pi c_1} \left(\int_{-\varphi}^{\varphi} |f(\alpha_n e^{i\theta})| d\theta + \int_{\alpha_n}^1 |f(x e^{i\varphi})| dx + \int_{\alpha_n}^1 |f(x e^{-i\varphi})| dx \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2} \left(\int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} |f(\alpha_{-n} e^{i\theta})| d\theta + \int_{\alpha_{-n}}^1 |f(x e^{i\varphi})| dx + \int_{\alpha_{-n}}^1 |f(x e^{-i\varphi})| dx \right). \end{aligned}$$

Положим $d = \max\{c_1^{-1}, c_2^{-1}\}$. Тогда, учитывая (4.32), (4.33), получаем

$$\begin{aligned} R_n &< \varepsilon + \frac{d}{2\pi} \left(\int_{-\varphi}^{\varphi} |f(\alpha_n e^{i\theta})| d\theta + \int_{\alpha_n}^1 |f(xe^{i\varphi})| dx + \int_{\alpha_n}^1 |f(xe^{-i\varphi})| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} |f(\alpha_{-n} e^{i\theta})| d\theta + \int_{\alpha_{-n}}^1 |f(xe^{i\varphi})| dx + \int_{\alpha_{-n}}^1 |f(xe^{-i\varphi})| dx \right) \\ &< \left(1 + \frac{2d}{\pi} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 4.19. Пусть точки $\{z_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условиям леммы 4.18. Тогда для всех $1 \leq p \leq \infty$ метод

$$f(\xi) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j),$$

где

$$c_{j\nu}(\xi, p) = \frac{W(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{\nu!(\nu_j-\nu-1)!} \left(\frac{(1-z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(\xi-z)(1-\bar{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \right) \Big|_{z=z_j}^{(\nu_j-\nu-1)},$$

является оптимальным на классе H_p , и

$$E(f(\xi), H_p, I) = \frac{|W(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\xi \in D$ и $f \in H_p$ положим

$$(4.35) \quad Jf = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{W(\xi)}{W(z)(z-\xi)} \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(z) dz.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = W(z)(1-\bar{\xi}z)^{-2/p}$. Имеем

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} |g(e^{i\theta})|^{p-2} f(e^{i\theta}) d\theta, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $\alpha = W(\xi)(1-|\xi|^2)^{(p-2)/p}$. Для $p = \infty$

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} \varphi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta,$$

где $\varphi(z) = |1-\bar{\xi}z|^{-2}$. С другой стороны, применяя лемму 4.18 к (4.35), получаем

$$f(\xi) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j) = Jf.$$

Остается применить теорему 2.9. □

СЛЕДСТВИЕ 4.20. Пусть точки $\{z_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условиям леммы 4.18 при $\nu_j \equiv 1$. Тогда для всех $1 \leq p \leq \infty$ метод

$$f(\xi) \approx W(\xi) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{W'(z_j)(\xi-z_j)} \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z_j} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j)$$

является оптимальным на классе H_p .

Рассмотрим некоторые конкретные системы точек. Пусть $\lambda \in (0, 1)$,

$$(4.36) \quad a_j := \operatorname{th} \left(j \frac{\pi \Lambda}{\Lambda'} \right), \quad j = 0, \pm 1, \dots,$$

где Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ и $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ соответственно. Положим

$$(4.37) \quad B_0(z) := z \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a_j^2 - z^2}{1 - a_j^2 z^2},$$

Введем обозначение $h = e^{-\pi \Lambda / \Lambda'}$. Тогда

$$a_j = \frac{1 - h^{2j}}{1 + h^{2j}}.$$

Сделав замену $z = -i \operatorname{tg} \pi v$, получим

$$z^2 = \frac{\cos 2\pi v - 1}{\cos 2\pi v + 1}$$

и

$$B_0(z) = -i \operatorname{tg} \pi v \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - 2h^{2j} \cos 2\pi v + h^{4j}}{1 + 2h^{2j} \cos 2\pi v + h^{4j}}.$$

Функцию $B_0(\cdot)$ можно записать через тета-функции (см. п. 8.12) следующим образом

$$B_0(z) = -i \frac{\theta_1(v)}{\theta_2(v)}.$$

Из формул (8.57) вытекает равенство

$$B_0(z) = -i \sqrt{\lambda} \frac{\operatorname{sn}(2\Lambda' v, \lambda')}{\operatorname{cn}(2\Lambda' v, \lambda')}.$$

Воспользовавшись вторым главным преобразованием первой степени (8.63), получаем

$$\frac{\operatorname{sn}(2\Lambda' v, \lambda')}{\operatorname{cn}(2\Lambda' v, \lambda')} = -i \operatorname{sn}(2\Lambda' i v, \lambda).$$

Таким образом,

$$B_0(z) = -\sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(2\Lambda' i v, \lambda).$$

Из того, что $v = \frac{i}{\pi} \operatorname{arth} z$, вытекает равенство

$$(4.38) \quad B_0(z) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z, \lambda \right).$$

Положим

$$(4.39) \quad b_j := \operatorname{th} \left((2j - 1) \frac{\pi \Lambda}{2\Lambda'} \right), \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Тогда

$$(4.40) \quad B_0(b_j) = (-1)^{j+1} \sqrt{\lambda}.$$

Следовательно, система точек $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 4.18, и для этой системы справедливо следствие 4.20, из которого вытекает, что оптимальный метод восстановления функции из класса H_p по значениям в узлах $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$ имеет вид

$$f(\xi) \approx \frac{\pi}{2\Lambda'} \operatorname{sn} \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z, \lambda \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{1 - a_j^2}{\xi - z_j} \left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - \bar{\xi} a_j} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(a_j).$$

Обозначим через $H_\infty(S_\beta)$ множество функций $f(\cdot)$, аналитических в полосе

$$S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\},$$

для которых $|f(z)| \leq 1$, $z \in S_\beta$. Рассмотрим на вещественной оси равномерную сетку $\{j\tau\}_{-\infty}^\infty$ с шагом $\tau > 0$. Функция

$$z = \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{4\beta} w \right)$$

конформно отображает полосу S_β на единичный круг D . При этом равномерная сетка $\{j\tau\}_{-\infty}^\infty$ переходит в систему точек $\{a_j\}_{-\infty}^\infty$, если λ выбрано из условия

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{4\beta}{\tau}.$$

Для λ справедливо следующее равенство (см. (8.54))

$$\lambda = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} = 4e^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{\sum_{n=0}^\infty e^{-sn(n+1)}}{1 + 2 \sum_{n=1}^\infty e^{-sn^2}} \right)^2, \quad s = \frac{\pi\Lambda'}{\Lambda} = \frac{4\pi\beta}{\tau}.$$

В силу конформной эквивалентности задач восстановления на классах H_∞ и $H_\infty(S_\beta)$ получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.21. *Для любого $\tau > 0$ и любого $t \in \mathbb{R}$ метод*

$$(4.41) \quad f(t) \approx \frac{\pi}{\Lambda'} \operatorname{sn} \left(\frac{\Lambda'}{2\beta} t, \lambda \right) \sum_{j=-\infty}^\infty (-1)^j \frac{f(j\tau)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2\beta} (t - j\tau) \right)},$$

в котором

$$\lambda = 4e^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{\sum_{n=0}^\infty e^{-sn(n+1)}}{1 + 2 \sum_{n=1}^\infty e^{-sn^2}} \right)^2, \quad s = \frac{4\pi\beta}{\tau},$$

является оптимальным методом на классе $H_\infty(S_\beta)$. Для его погрешности справедливо равенство

$$E(f(t), H_\infty(S_\beta), I) = \sqrt{\lambda} \left| \operatorname{sn} \left(\frac{\Lambda'}{2\beta} t, \lambda \right) \right|.$$

Отметим, что для максимального значения погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$(4.42) \quad \max_{t \in \mathbb{R}} E(f(t), H_\infty(S_\beta), I) = \sqrt{\lambda} = 2e^{-\pi\beta/\tau} + O(e^{-5\pi\beta/\tau}).$$

Хорошо известно, что целые функции могут быть точно восстановлены по их значениям в равномерной сетке при достаточно малом шаге сетки (это восстановление дается формулой Котельникова). Аналитические и ограниченные в полосе функции не могут быть точно восстановлены по значениям в равномерной сетке какой бы малый шаг сетки не был. Тем не менее формула (4.41) дает возможность восстанавливать такие функции приближенно (более того, наилучшим образом) по значениям в равномерной сетке с произвольным шагом. Естественно, что погрешность такого приближения уменьшается с уменьшением шага (см. (4.42)).

4.7. Восстановление производной

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления производной функции $f(\cdot) \in H_p$ в некоторой точке $\xi \in D$ по значениям информационного оператора (4.9). Если $\xi = z_j$ при некотором $1 \leq j \leq n$, то будем считать, что $\nu_j = 1$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta(\xi) &= \frac{1 - |\xi|^2}{2} W'(\xi) + \frac{\bar{\xi}}{p} W(\xi), \\ D_1 &= \left\{ \xi \in D : |\beta(\xi)| < \frac{p-1}{p} |W(\xi)| \right\}, \quad D_0 := D \setminus D_1, \\ b &= \begin{cases} \frac{p}{p-1} \frac{\beta(\xi)}{W(\xi)}, & \xi \in D_1, \\ \frac{\overline{W(\xi)} e^{i \arg \beta(\xi)}}{|\beta(\xi)| + \sqrt{|\beta(\xi)|^2 - \frac{p-2}{p} |W(\xi)|^2}}, & \xi \in D_0, \end{cases} \\ a &= \frac{\xi - \bar{b}}{1 - \bar{\xi} b}, \quad u_\xi(z) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_1, \\ \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}, & \xi \in D_0. \end{cases} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.22. При всех $1 \leq p \leq \infty$ метод

$$f'(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j),$$

где при $\xi \neq z_j$

$$\begin{aligned} c_{j\nu}(\xi, p) &= -\frac{\alpha(\xi)}{\nu! (\nu_j - \nu - 1)!} \left(\frac{u_\xi(z) (1 - \bar{z}_j z)^{\nu_j} (1 - \bar{a} z)^{2(p-1)/p}}{\omega_j(z) (z - \xi)^2 (1 - \bar{\xi} z)^{2(p-2)/p}} \right)_{|z=z_j}^{(\nu_j - \nu - 1)}, \\ c_{j0}(z_j, p) &= \frac{\omega'_j(z_j)}{\omega_j(z_j)} + \frac{2}{p} \frac{\bar{z}_j}{1 - |z_j|^2}, \end{aligned}$$

а

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} \frac{W(\xi) (1 - |\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{u_\xi(\xi) (1 - \bar{a} \xi)^{2(p-1)/p}}, & \xi \notin \{z_1, \dots, z_n\}, \\ \frac{\omega_j(\xi)}{(1 - |\xi|^2)^{2/p}}, & \xi = z_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p . Для погрешности оптимального метода восстановления значений производной функций $f(\cdot) \in H_p$ в точке ξ по информации I_τ справедливо равенство

$$E(f'(\xi), H_p, I_\tau) = \begin{cases} \frac{|W(\xi)| (1 + |b|^2)^{\frac{p-1}{p}}}{|u_\xi(\xi)| (1 - |\xi|^2)^{\frac{p+1}{p}}}, & \xi \notin \{z_1, \dots, z_n\}, \\ \frac{|\omega_j(\xi)|}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{p+1}{p}}}, & \xi = z_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \frac{W(z) (1 - \bar{a} z)^{2/p}}{u_\xi(z) (1 - \bar{\xi} z)^{4/p}}.$$

Пусть $\xi \notin \{z_1, \dots, z_n\}$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда по теореме о вычетах для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ имеем

$$\begin{aligned}
 (4.43) \quad \alpha(\xi) \int_0^{2\pi} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) d\mu(z) \\
 = \frac{\alpha(\xi)}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{u_\xi(z)(1-\bar{a}z)^{2(p-1)/p} f(z) dz}{W(z)(z-\xi)^2(1-\bar{\xi}z)^{2(p-2)/p}} \\
 = f'(\xi) + \lambda(a)f(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j),
 \end{aligned}$$

где

$$\lambda(a) = \alpha(\xi) \left(\frac{u_\xi(z)(1-\bar{a}z)^{2(p-1)/p}}{W(z)(1-\bar{\xi}z)^{2(p-2)/p}} \right)'_{z=\xi}.$$

Несложно убедиться, что параметр a выбран так, чтобы $\lambda(a) = 0$. Подставляя в (4.43) $f(\cdot) = g(\cdot)$, находим

$$\|g(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p}^p = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1-\bar{a}z)(z-a) dz}{(z-\xi)^2(1-\bar{\xi}z)^2} = \frac{1+|b|^2}{(1-|\xi|^2)|1-\xi b|^2}.$$

Теперь утверждение теоремы в рассматриваемом случае вытекает из теоремы 2.9. Если $\xi = z_k$, то $a = \xi$, и аналогично предыдущему случаю получаем равенство

$$\begin{aligned}
 \alpha(\xi) \int_0^{2\pi} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) d\mu(z) &= \frac{\alpha(\xi)}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1-\bar{\xi}z)^{2/p} f(z) dz}{\omega_k(z)(z-\xi)^2} \\
 &= f'(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j)
 \end{aligned}$$

(надо учесть, что в силу нашей договоренности $\nu_k = 1$). Далее применяем теорему 2.9.

При $p = \infty$ используется та же схема рассуждений и равенство

$$\alpha(\xi) \int_0^{2\pi} \overline{g(z)} |\varphi(z)| f(z) d\mu(z) = \frac{\alpha(\xi)}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{u_\xi(z)(1-\bar{a}z)^2 f(z) dz}{W(z)(z-\xi)^2(1-\bar{\xi}z)^2},$$

где

$$\varphi(z) = \frac{(1-\bar{a}z)^2}{(1-\bar{\xi}z)^4}.$$

□

Из доказательства теоремы 4.22 вытекает, что в общей ситуации единичный круг D разбивается на две части D_0 и D_1 , в первой из которых экстремальная функция $g(\cdot)/\|g(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p}$ имеет нули соответствующих кратностей только в точках $z_1, \dots, z_n$, а во второй — появляется дополнительный нуль в точке a . Появление двух таких множеств впервые, по-видимому, было обнаружено J. Dieudonné [2], который, решая экстремальную задачу

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty \\ f(0)=0}} |f'(\xi)|,$$

обнаружил, что при $|\xi| \leq \sqrt{2} - 1$ экстремальной функцией является $f(z) = z$, а при $\sqrt{2} - 1 < |\xi| < 1$ у экстремальной функции появляется дополнительный

нуль в некоторой точке $a(\xi)$. Для этого дополнительного нуля справедливо равенство

$$a(\xi) = \frac{3|\xi|^2 - 1}{\xi(1 + |\xi|^2)}.$$

В частности, имеем

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty \\ f(0)=0}} \left| f' \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right| = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

а $f(z) = z^2$ является экстремальной функцией в этой задаче.

Рассмотрим задачу, обобщающую предыдущую, о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in H_p \\ f(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0}} |f'(\xi)|.$$

В этом случае множество D_0 , будет иметь вид

$$D_0 = \left\{ \xi \in D : \left(n - \frac{2}{p} \right) |\xi|^2 + 2 \frac{p-1}{p} |\xi| - n \leq 0 \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что при $1 \leq p \leq 2$ $D_0 = D$, а при $2 < p \leq \infty$ $D_0 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq r_{np}\}$, где

$$r_{np} = \frac{\sqrt{\left(\frac{p-1}{p} \right)^2 + n \left(n - \frac{2}{p} \right) - \frac{p-1}{p}}}{n - \frac{2}{p}}.$$

Из теоремы 4.22 вытекает также решение задачи об оптимальном восстановлении производной в нуле функции $f(\cdot) \in H_p$ по ее значениям в точках r и $-r$, $r \in (0, 1)$. Оптимальный метод восстановления при всех $1 \leq p \leq \infty$ имеет вид

$$f'(0) \approx (1 - r^2) \frac{f(r) - f(-r)}{2r}.$$

4.8. Восстановление производных по неточным значениям функций

Рассмотрим задачу оптимального восстановления производных функций по их значениям, заданным с ошибкой в равномерной норме. Пусть W — выпуклый и уравновешенный класс достаточно гладких функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей множество E . Через $F_\delta(E)$ обозначим информационный оператор, который каждой функции из $f(\cdot) \in W$ ставит в соответствие множество функций $\tilde{f}(\cdot) \in C(E)$ таких, что

$$\|f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)\|_{C(E)} \leq \delta.$$

Положим

$$E(f^{(k)}(\xi), W, F_\delta(E)) = \inf_{\varphi: C(E) \rightarrow \mathbb{C}} \sup_{\substack{f(\cdot) \in W, \tilde{f}(\cdot) \in C(E) \\ \|f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)\|_{C(E)} \leq \delta}} |f^{(k)}(\xi) - \varphi(\tilde{f}(\cdot))|.$$

Для $W = W_\infty^2([-1, 1])$, $E = [-1, 1]$ и $k = 1$ эта задача рассматривалась в п. 1.4 (см. (1.13)). Здесь мы рассматриваем случай, когда $W = H_\infty$, $E = (-1, 1)$ и $k = 1$.

Из теоремы 2.4 (см. равенство (2.12)) следует, что

$$(4.44) \quad E(f'(\xi), H_\infty, F_\delta((-1, 1))) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty \\ \|f(\cdot)\|_{C(-1, 1)} \leq \delta}} |f'(\xi)|.$$

Следовательно, для $\delta \geq 1$

$$E(f'(\xi), H_\infty, F_\delta((-1, 1))) = \sup_{f(\cdot) \in H_\infty} |f'(\xi)|,$$

а метод $\varphi(\tilde{f}(\cdot)) \equiv 0$ является оптимальным. Из теоремы 4.22 (при $W(z) = 1$) можно получить, что

$$(4.45) \quad \sup_{f(\cdot) \in H_\infty} |f'(\xi)| = \frac{1}{1 - |\xi|^2}.$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $0 < \delta < 1$. Оказывается, что в этом случае (так же, как и в задаче (1.13)) оптимальный метод использует не все значения функции $\tilde{f}(\cdot)$ из интервала $(-1, 1)$, а только значения в дискретной системе точек, плотность которой увеличивается при уменьшении погрешности задания значений δ .

ТЕОРЕМА 4.23. *Для всех $0 < \delta < 1$ и $\xi \in (-1, 1)$ метод*

$$f'(\xi) \approx \frac{2\pi}{\Lambda'(1 - \delta^4)(1 - \xi^2)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2 \left((2j-1) \frac{\pi\Lambda}{\Lambda'} \right)} \tilde{f} \left(\frac{b_j + \xi}{1 + \xi b_j} \right),$$

где b_j определено формулой (4.39), а Λ, Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $\lambda = \delta^2$, $\lambda' = \sqrt{1 - \delta^4}$ соответственно, является оптимальным методом восстановления на классе H_∞ по значениям на интервале $(-1, 1)$, заданным с погрешностью δ в равномерной метрике. Кроме того,

$$E(f'(\xi), H_\infty, F_\delta((-1, 1))) = \frac{2\delta\Lambda'}{\pi(1 - \xi^2)} = \frac{4}{\pi(1 - \xi^2)} \delta \ln \frac{2}{\delta} + O \left(\delta^5 \ln \frac{1}{\delta} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(4.46) \quad B_1(z) := \prod_{j=1}^{\infty} \frac{b_j^2 - z^2}{1 - b_j^2 z^2}, \quad h(z) := \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 - a_j^2 z^2}{1 - b_j^2 z^2} \right)^2,$$

$$(4.47) \quad \psi(z) := \frac{B_0(z)h(z)}{zB_1(z)},$$

где a_j и b_j определены формулами (4.36) и (4.39), а функция $B_0(\cdot)$ определена равенством (4.37). Тем же путем, каким было получено представление (4.38), получаем равенства

$$(4.48) \quad B_1(z) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z + \Lambda, \lambda \right)$$

и

$$(4.49) \quad h(z) = \frac{1 - z^2}{\operatorname{dn}^2 \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z, \lambda \right)}.$$

Таким образом,

$$\psi(z) = \frac{1 - z^2}{z} \frac{\operatorname{sn} \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z, \lambda \right)}{\operatorname{cn} \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z, \lambda \right) \operatorname{dn} \left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arth} z, \lambda \right)}.$$

В силу (8.67) получаем

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{1-z^2}{z} \frac{1}{1+\lambda} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{4L'}{\pi} \operatorname{arth} z, l\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{4L'}{\pi} \operatorname{arth} z, l\right)} \\ &= -\frac{1-z^2}{z} \frac{i}{(1+\lambda) \operatorname{dn}\left(\frac{4L'}{\pi} \operatorname{arth} z + iL', l\right)},\end{aligned}$$

где $l = 2\sqrt{\lambda}/(1+\lambda)$, а L, L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $l, l' = \sqrt{1-l^2}$ соответственно. Если $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, то $\operatorname{arth} z = x + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \sin \theta$, где $x = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right|$. Следовательно,

$$\psi(e^{i\theta}) = -\frac{2 \sin \theta}{(1+\lambda) \operatorname{dn}\left(\frac{4L'}{\pi} x + iL'(1 + \operatorname{sign} \sin \theta), l\right)} = \frac{2|\sin \theta|}{(1+\lambda) \operatorname{dn}\left(\frac{4L'}{\pi} x, l\right)}.$$

Так как для всех $u \in \mathbb{R}$

$$1 \geq \operatorname{dn}(u, l) \geq l' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

то для почти всех $\theta \in \mathbb{T}$, $\psi(e^{i\theta}) > 0$. Кроме того, $\psi(e^{i\theta}) \in L_1(\mathbb{T})$.

Для $f(\cdot) \in H_\infty$ положим

$$Jf := \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{B_0(e^{i\theta})} \psi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Запишем этот интеграл в виде

$$(4.50) \quad Jf = \frac{\delta}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{h(z)}{B_1(z)z^2} f(z) dz.$$

В силу (4.48)

$$B_1(a_j) = (-1)^j \sqrt{\lambda}.$$

Применяя лемму 4.18 к интегралу (4.50), получаем

$$Jf = f'(0) + \delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{h(b_j)}{B_1'(b_j)b_j^2} f(b_j).$$

Из (4.48) и (4.49) имеем

$$(4.51) \quad B_1'(b_j) = (-1)^j \sqrt{\lambda} \frac{2\Lambda'}{\pi(1-b_j^2)}, \quad h(b_j) = \frac{1-b_j^2}{1-\lambda^2}.$$

Таким образом,

$$Jf = f'(0) - \varphi_0(I f),$$

где

$$\varphi_0(y(\cdot)) = \frac{2\pi}{\Lambda'(1-\delta^4)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left((2j-1)\frac{\pi\Lambda}{\Lambda'}\right)} y(b_j), \quad y(\cdot) \in C((-1, 1)).$$

Кроме того,

$$\varphi_0(B_0(\cdot)) = \delta \|\varphi_0\|.$$

Из теоремы 2.8 следует, что метод $\varphi_0(\cdot)$ оптимальный для $\xi = 0$, а функция $B_0(\cdot)$ — экстремальная. Тем самым

$$E(f'(\xi), H_\infty, F_\delta((-1, 1))) = B'_0(0) = \delta \frac{2\Lambda'}{\pi}.$$

Асимптотическое равенство для погрешности оптимального восстановления вытекает из (8.56)

$$\Lambda' = \ln \frac{4}{\delta^2} + O\left(\delta^4 \ln \frac{1}{\delta}\right).$$

Для произвольной точки $\xi \in (-1, 1)$ утверждение теоремы может быть получено при рассмотрении функции $g(\cdot) = f(w(\cdot))$, где

$$w(z) = \frac{z + \xi}{1 + \xi z}$$

— конформное преобразование единичного круга D . Для этой функции $g'(0) = (1 - \xi^2)f'(\xi)$. $\square$

С помощью конформного отображения полосы S_β на единичный круг из теоремы 4.23 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.24. Для всех $0 < \delta < 1$ и $t \in \mathbb{R}$ метод

$$f'(t) \approx \frac{\pi^2}{2\beta\Lambda'(1-\delta^4)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left((2j-1)\frac{\pi\Lambda'}{\Lambda'}\right)} \tilde{f}\left(t + (2j-1)\frac{2\beta\Lambda'}{\Lambda'}\right)$$

является оптимальным методом восстановления на классе $H_\infty(S_\beta)$ по значениям на $\mathbb{R}$, заданным с погрешностью δ в равномерной метрике. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E(f'(t), H_\infty(S_\beta), F_\delta(\mathbb{R})) = \frac{\delta\Lambda'}{2\beta} = \frac{1}{\beta}\delta \ln \frac{2}{\delta} + O\left(\delta^5 \ln \frac{1}{\delta}\right).$$

4.9. Неравенство Колмогорова для аналитических в полосе функций

Обозначим через $H_\infty^r(S_\beta)$ множество функций $f(\cdot)$, аналитических в полосе

$$S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\},$$

для которых $|f^{(r)}(z)| \leq 1$, $z \in S_\beta$. Нас будет интересовать величина $E(f^{(k)}(t), H_\infty^r(S_\beta), F_\delta(\mathbb{R}))$. При $k = 1$, $r = 0$ она была найдена в следствии 4.24. В общем случае в силу двойственности имеет место равенство, аналогичное (4.44)

$$(4.52) \quad E(f^{(k)}(t), H_\infty^r(S_\beta), F_\delta(\mathbb{R})) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r(S_\beta) \\ \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \delta}} |f^{(k)}(t)|.$$

А в силу инвариантности класса $H_\infty^r(S_\beta)$ относительно сдвига

$$(4.53) \quad \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r(S_\beta) \\ \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \delta}} |f^{(k)}(t)| = \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r(S_\beta) \\ \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

В вещественном случае для соболевского класса экстремальная задача

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A_0, \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A_r, \\ 1 \leq k \leq r-1,$$

была решена А. Н. Колмогоровым [44]. Эта задача эквивалентна нахождению точной константы в неравенстве

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq C \|f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^\alpha \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^\beta.$$

Решение записывается в терминах *констант Фавара*

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(r+1)}}{(2n+1)^{r+1}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Точное неравенство имеет вид

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-k/r}} \|f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/r} \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/r}.$$

В комплексном случае для класса $H_\infty^r(S_\beta)$ такой эквивалентности уже нет, хотя неравенства в несколько ином виде выписать можно (они не будут мультипликативными).

Приведем в качестве примера неравенство, которое может быть получено из следствия 4.24. Из этого следствия вытекает, что для функции $f(\cdot) \in H_\infty(S_\beta)$ такой, что $\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \delta$, $0 < \delta < 1$, справедливо неравенство

$$(4.54) \quad \|f'(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{\delta \Lambda'}{2\beta} = \frac{1}{2\beta} \delta \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 - \delta^4) \sin^2 x}}.$$

Из равенства (4.45) с помощью конформного отображения полосы S_β на единичный круг получаем

$$\sup_{f(\cdot) \in H_\infty(S_\beta)} |f'(\xi)| = \frac{\pi}{4\beta}.$$

Тем самым неравенство (4.54) остается верным и при $\delta = 1$. Пусть $f(\cdot)$ — произвольная функция, аналитическая в полосе S_β , ограниченная там и отличная от тождественного нуля. Положим в (4.54)

$$\delta = \frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f(\cdot)\|_{C(S_\beta)}}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|f'(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} &\leq \frac{1}{2\beta} \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \|f(\cdot)\|_{C(S_\beta)}^2 \\ &\quad \times \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\|f(\cdot)\|_{C(S_\beta)}^4 \cos^2 x + \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}^4 \sin^2 x}}. \end{aligned}$$

Пусть Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $\lambda \in (0, 1)$ и $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ соответственно. Рассмотрим функцию

$$\phi_\lambda(z) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left(\frac{\Lambda'}{2\beta} z, \lambda \right).$$

Из (8.11) следуют равенства

$$\operatorname{sn} \frac{i\Lambda'}{2} = \frac{i}{\sqrt{\lambda}}, \quad \operatorname{cn} \frac{i\Lambda'}{2} = \frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \operatorname{dn} \frac{i\Lambda'}{2} = \sqrt{1+\lambda}.$$

Из формулы (8.62) следует, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\phi_\lambda(x \pm i\beta) = \frac{(1 + \lambda) \operatorname{sn} \frac{\Lambda'x}{2\beta} \pm i \operatorname{cn} \frac{\Lambda'x}{2\beta} \operatorname{dn} \frac{\Lambda'x}{2\beta}}{1 + \lambda \operatorname{sn}^2 \frac{\Lambda'x}{2\beta}}.$$

Легко убедиться, что $|\phi_\lambda(x \pm i\beta)| = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тем самым $\phi_\lambda(\cdot) \in H_\infty(S_\beta)$.

Положим $\Phi_{\lambda,0,\beta}(z) = \phi_\lambda(z)$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\lambda,2j-1,\beta}(z) &= \int_{2\Lambda\beta/\Lambda'}^z \Phi_{\lambda,2j-2,\beta}(u) du, \\ \Phi_{\lambda,2j,\beta}(z) &= \int_0^z \Phi_{\lambda,2j-1,\beta}(u) du,\end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots$$

Ясно, что

$$\Phi_{\lambda,r,\beta}^{(j)}(\cdot) = \Phi_{\lambda,r-j,\beta}(\cdot), \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Функции $\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)$ имеют период $8\Lambda\beta/\Lambda'$ и нулевое среднее на периоде.

При четном r функции $\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)$ имеют простые нули в точках $4k\Lambda\beta/\Lambda'$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а их графики симметричны относительно точек $(4k\Lambda\beta/\Lambda', 0)$ и прямых $z = (2k+1)2\Lambda\beta/\Lambda'$. При нечетном r функции $\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)$ имеют простые нули в точках $(2k+1)2\Lambda\beta/\Lambda'$, а их графики симметричны относительно точек $((2k+1)2\Lambda\beta/\Lambda', 0)$ и прямых $z = 4k\Lambda\beta/\Lambda'$. Функции $\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)$ строго монотонны между соседними точками экстремума и сохраняют направление выпуклости между соседними нулями.

Используя разложение эллиптического синуса в ряд Фурье (см. (8.69))

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\Lambda'}{2\beta}z, \lambda\right) = \frac{\pi}{\lambda\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{4\Lambda\beta}z\right)}{\operatorname{sh}\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)},$$

получаем

$$(4.55) \quad \Phi_{\lambda,r,\beta}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\Lambda}} \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{4\Lambda\beta}z - \frac{\pi r}{2}\right)}{(2n+1)^r \operatorname{sh}\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)}$$

Учитывая отмеченные свойства функций $\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)$ нетрудно убедиться, что

$$(4.56) \quad \|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\Lambda}} \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(r+1)}}{(2n+1)^r \operatorname{sh}\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)}.$$

ТЕОРЕМА 4.25. Пусть $\delta \in (0, \infty)$ при $r \geq 1$ и $\delta \in (0, 1)$ при $r = 0$. Тогда при всех $1 \leq k \leq r+1$

$$(4.57) \quad \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r(S_\beta) \\ \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \|\Phi_{\lambda,r,\beta}^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \\ = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\Lambda}} \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^{r-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(r-k+1)}}{(2n+1)^{r-k} \operatorname{sh}\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)},$$

где λ удовлетворяет равенству

$$(4.58) \quad \|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \delta.$$

Докажем сначала ряд предварительных результатов. Обозначим через $H_\infty^{\mathbb{R}}$ множество функций из H_∞ , вещественных на вещественной оси.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.26. Пусть $f(\cdot) \in H_\infty^{\mathbb{R}}$ и при некотором $\lambda \in (0, 1)$

$$(4.59) \quad \|f(\cdot)\|_{C(-1,1)} \leq \|B_0(\cdot)\|_{C(-1,1)},$$

где функция $B_0(\cdot)$ определена в (4.37). Если $\xi \in (-1, 1)$ и $f(\xi) = B_0(\xi)$, то

$$|f'(\xi)| \leq |B_0'(\xi)|.$$

Доказательство. В силу (4.38) и (4.40) имеем

$$(4.60) \quad \|B_0(\cdot)\|_{C(-1,1)} = \sqrt{\lambda}, \quad B_0(\pm b_j) = \pm(-1)^{j+1}\sqrt{\lambda}.$$

Тем самым утверждение предложения очевидно для $\xi = \pm b_j$, $j = 1, 2, \dots$. Для $f(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}$ и $\xi \neq \pm b_j$, $j = 1, 2, \dots$, положим

$$Jf = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{h(z)f(z) dz}{B_1(z)(z-\xi)^2(1-\xi z)^2},$$

где $h(\cdot)$ и $B_1(\cdot)$ определены равенствами (4.46). Из леммы 4.18 получаем

$$\begin{aligned} Jf &= \left(\frac{h(z)f(z)}{B_1(z)(1-\xi z)^2} \right)' \Big|_{z=\xi} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(b_j)}{B_1'(b_j)} \left(\frac{f(b_j)}{(b_j-\xi)^2(1-\xi b_j)^2} - \frac{f(-b_j)}{(b_j+\xi)^2(1+\xi b_j)^2} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (4.51), имеем

$$\begin{aligned} (4.61) \quad f'(\xi) &= -C(\xi) \left(\frac{h(z)}{B_1(z)(1-\xi z)^2} \right)' \Big|_{z=\xi} f(\xi) + \frac{\pi C(\xi)}{2\sqrt{\lambda}\Lambda'(1-\lambda^2)} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} (1-b_j^2)^2 \left(\frac{f(b_j)}{(b_j-\xi)^2(1-\xi b_j)^2} - \frac{f(-b_j)}{(b_j+\xi)^2(1+\xi b_j)^2} \right) \\ &\quad + C(\xi)Jf, \end{aligned}$$

где

$$C(\xi) = \frac{B_1(\xi)(1-\xi^2)^2}{h(\xi)}.$$

Положив

$$\psi_1(z) = \frac{z^2}{(z-\xi)^2(1-\xi z)^2}$$

и учитывая, что $|B_0(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, будем иметь

$$Jf = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{B_0(e^{i\theta})} \psi(e^{i\theta}) \psi_1(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta,$$

где функция $\psi(\cdot)$ определена равенством (4.47). При доказательстве теоремы 4.23 было показано, что функция $\psi(e^{i\theta})$ ограничена и почти всюду положительна. Очевидно этим же свойством обладает функция $\psi_1(e^{i\theta})$. Таким образом, для всех $f \in H_\infty^\mathbb{R}$

$$(4.62) \quad |Jf| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta}) \psi_1(e^{i\theta}) d\theta = JB_0.$$

Предположим, что $C(\xi) > 0$. Тогда в силу (4.60), (4.61) и (4.62) имеем

$$(4.63) \quad f'(\xi) \leq -C(\xi) \left(\frac{h(z)}{B_1(z)(1-\xi z)^2} \right)'_{|z=\xi} f(\xi) + \frac{\pi C(\xi)}{2\Lambda'(1-\lambda^2)} \sum_{j=1}^{\infty} (1-b_j^2)^2 \left(\frac{1}{(b_j-\xi)^2(1-\xi b_j)^2} + \frac{1}{(b_j+\xi)^2(1+\xi b_j)^2} \right) + C(\xi)JB_0.$$

Если $f(\xi) = B_0(\xi)$, то правая часть в последнем неравенстве совпадает с $B'_0(\xi)$ (см. (4.61)). Тем самым

$$(4.64) \quad f'(\xi) \leq B'_0(\xi).$$

Положим

$$g(z) = f\left(\frac{\alpha-z}{1-\alpha z}\right), \quad \alpha = \frac{2\xi}{1+\xi^2}.$$

Очевидно, что $g \in H_{\infty}^{\mathbb{R}}$ и удовлетворяет условию (4.59). Кроме того, $g(\xi) = f(\xi)$ и $g'(\xi) = -f'(\xi)$. Поэтому, применяя неравенство (4.64) к функции $g(\cdot)$, получаем

$$-f'(\xi) \leq B'_0(\xi).$$

Случай $C(\xi) < 0$ рассматривается аналогично, заменяя неравенство (4.63) на противоположное. $\square$

Обозначим через $H_{\infty}^{r,\mathbb{R}}(S_{\beta})$ класс функций из $H_{\infty}^r(S_{\beta})$, вещественных на вещественной оси. При $r = 0$ соответствующий класс будем обозначать через $H_{\infty}^{\mathbb{R}}(S_{\beta})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.27. Пусть $f(\cdot) \in H_{\infty}^{\mathbb{R}}(S_{\beta})$ и при некотором $\lambda \in (0, 1)$

$$\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\phi_{\lambda}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Если $a, b \in \mathbb{R}$ и $f(a) = \phi_{\lambda}(b)$, то

$$|f'(a)| \leq |\phi'_{\lambda}(b)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что функция $g(z) = f(z+a-b)$ принадлежит классу $H_{\infty}^{\mathbb{R}}(S_{\beta})$ и, кроме того,

$$\|g(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}, \quad g(b) = f(a), \quad g'(b) = f'(a),$$

можно считать, что $a = b$. Положим

$$w(z) = \frac{4\beta}{\pi} \operatorname{arth} z.$$

Эта функция конформно отображает единичный круг D на полосу S_{β} . Тем самым $f(w(\cdot)) \in H_{\infty}^{\mathbb{R}}$. Так как $\phi_{\lambda}(w(\cdot)) = B_0(\cdot)$ (см. (4.38)), то положив $\xi = \operatorname{th} \frac{\pi a}{4\beta}$, из предложения 4.26 будем иметь

$$|f'(w(\xi))w'(\xi)| \leq |\phi'_{\lambda}(w(\xi))w'(\xi)|.$$

Следовательно, $|f'(a)| \leq |\phi'_{\lambda}(a)|$. $\square$

ЛЕММА 4.28. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы вещественные непрерывные функции $g(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$, дифференцируемы в интервале (a, b) , причем $\varphi(\cdot)$ строго возрастает и вогнута. Если

$$a) \quad g(a) = \varphi(a), \quad g(b) > \varphi(b)$$

или

$$b) \quad g(b) = \varphi(b), \quad g(a) < \varphi(a),$$

то на интервале (a, b) существуют точки α и β такие, что $g(\alpha) = \varphi(\beta)$ и $g'(\alpha) > \varphi'(\beta)$.

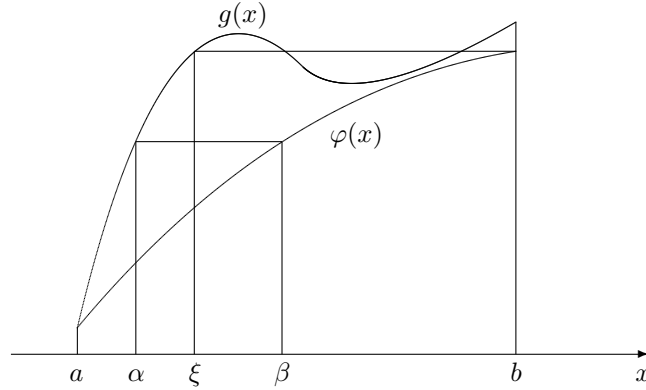


Рис. 4.9.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала утверждение леммы для случая а). Можно считать, что $g(x) > \varphi(x)$, иначе последующие рассуждения можно применить к отрезку $[a_1, b]$, где a_1 — самый правый нуль разности $g(x) - \varphi(x)$ на (a, b) .

Так как $g(\cdot)$ непрерывна, то она принимает в некоторых точках интервала (a, b) значение, равное $\varphi(b)$. Пусть ξ — самая левая из таких точек, т. е. $g(\xi) = \varphi(\xi)$ и $g(x) < \varphi(b)$ при $x \in (a, \xi)$ (см. рис. 4.9.2). Функция $\varphi(\cdot)$ строго возрастает, следовательно, $\varphi(\xi) < \varphi(b)$ и, значит,

$$\int_a^\xi \varphi'(x) dx < \int_a^\xi g'(x) dx.$$

Поэтому существует точка $\alpha \in (a, \xi)$ такая, что $\varphi'(\alpha) < g'(\alpha)$. Но так как

$$\varphi(\alpha) < g(\alpha) < g(\xi) = \varphi(\xi),$$

то в некоторой точке $\beta \in (\alpha, \xi)$ будет $\varphi(\beta) = g(\alpha)$. В силу вогнутости функции $\varphi(\cdot)$ выполняется неравенство $\varphi'(\beta) \leq \varphi'(\alpha)$. Следовательно,

$$g'(\alpha) > \varphi'(\alpha) \geq \varphi'(\beta).$$

Пусть теперь выполнено условие б). Ясно, что в некоторой точке $a + h$, где $h \in (0, b - a)$, будет $g(a + h) = \varphi(a)$. Положим

$$g_1(x) = g(x + h), \quad x \in [a, b - h].$$

Тогда $g_1(a) = \varphi(a)$, $g_1(b - h) = g(b) > \varphi(b)$. Тем самым для функций $g_1(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ выполнено условие а) на отрезке $[a, b - h]$ и по уже доказанному в некоторых точках α_1, β , $a < \alpha_1 < \beta < b - h$, выполняются соотношения

$$g_1(\alpha_1) = \varphi(\beta), \quad g_1'(\alpha_1) > \varphi'(\beta).$$

Положив $\alpha = \alpha_1 + h$, получим

$$g(\alpha) = \varphi(\beta), \quad g'(\alpha) > \varphi'(\beta).$$

□

ТЕОРЕМА 4.29. Пусть $f(\cdot) \in H_{\infty}^{r, \mathbb{R}}(S_\beta)$, $r \geq 0$ и при некотором $\lambda \in (0, 1)$

$$(4.65) \quad \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_{\lambda, r, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Если $a, b \in \mathbb{R}$ и $f(a) = \Phi_{\lambda, r, \beta}(b)$, то

$$|f'(a)| \leq |\Phi'_{\lambda, r, \beta}(b)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать утверждение теоремы по индукции. При $r = 0$ утверждение вытекает из предложения 4.27. Пусть теорема доказана для $r = k - 1$. Докажем ее для $r = k$. Пусть $f(\cdot) \in H_{\infty}^{k, \mathbb{R}}(S_{\beta})$, $k \geq 1$, и

$$(4.66) \quad \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_{\lambda, k, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Покажем сначала, что

$$(4.67) \quad \|f'(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Предположим, что это не так. Тогда найдется точка $x_0 \in \mathbb{R}$, для которой

$$|f'(x_0)| > \|\Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \|\Phi'_{\lambda, k, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Так как вместо $f(z)$ можно рассмотреть функцию $-f(z+t)$, где t — произвольное вещественное число, то можно считать, что $f'(x_0) > 0$ и

$$\|\Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(x_0).$$

Обозначим через x_1 и x_2 ближайшие слева и справа от x_0 нули функции $\Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\cdot)$, которая, следовательно, вогнута на (x_1, x_2) , строго возрастает на (x_1, x_0) и строго убывает на (x_0, x_2) .

Найдется точка $\alpha \in (x_1, x_2)$, в которой $f'(\alpha) \leq \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\alpha)$, ибо предположение, что $f'(x) > \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(x)$ для всех $x \in (x_1, x_2)$ означало бы, что

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx > \int_{x_1}^{x_2} \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(x) dx = 2\|\Phi_{\lambda, k, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$$

и, значит,

$$\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} > \|\Phi_{\lambda, k, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$$

— в противоречии с (4.66). Положим $f_1(\cdot) = \gamma f'(\cdot)$, где $\gamma \in (0, 1)$ выбрано так, что $\|f_1(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \|\Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$. Тогда

$$\|f_1^{(k-1)}(\cdot)\|_{L_{\infty}(S_{\beta})} = \gamma \|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_{\infty}(S_{\beta})} < 1,$$

т. е. $f_1(\cdot) \in H_{\infty}^{k-1, \mathbb{R}}(S_{\beta})$. Тем самым

$$f_1(\alpha) = \gamma f'(\alpha) < \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\alpha), \quad f_1(x_0) = \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(x_0).$$

Предположим, что $\alpha < x_0$. Тогда из леммы 4.28 (условие b)) вытекает, что существуют точки $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (\alpha, x_0)$ такие, что $f_1(\tilde{\alpha}) = \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\tilde{\beta})$ и $f'_1(\tilde{\alpha}) > \Phi'_{\lambda, k-1, \beta}(\tilde{\beta})$, что противоречит предположению о справедливости теоремы при $r = k - 1$. Если $\alpha > x_0$, то рассмотрим функции

$$g(x) = f_1(2x_0 - x), \quad \varphi(x) = \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(2x_0 - x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} g(2x_0 - \alpha) &= f_1(\alpha) < \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\alpha) = \varphi(2x_0 - \alpha), \\ g(x_0) &= f_1(x_0) = \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(x_0) = \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Тогда снова по лемме 4.28 (условие b)) существуют точки $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1 \in (2x_0 - \alpha, x_0)$ такие, что $g(\tilde{\alpha}_1) = \varphi(\tilde{\beta}_1)$ и $g'(\tilde{\alpha}_1) > \varphi'(\tilde{\beta}_1)$. Переходя к функциям $f_1(\cdot)$ и $\Phi_{\lambda, k-1, \beta}(\cdot)$, получим

$$f_1(2x_0 - \tilde{\alpha}_1) = \Phi_{\lambda, k-1, \beta}(2x_0 - \tilde{\beta}_1), \quad -f'_1(2x_0 - \tilde{\alpha}_1) > -\Phi'_{\lambda, k-1, \beta}(2x_0 - \tilde{\beta}_1).$$

Из того, что $\Phi'_{\lambda, k-1, \beta}(2x_0 - \tilde{\beta}_1) < 0$ следует, что

$$|f'_1(2x_0 - \tilde{\alpha}_1)| > |\Phi'_{\lambda, k-1, \beta}(2x_0 - \tilde{\beta}_1)|,$$

что противоречит предположению индукции. Итак, неравенство (4.67) доказано.

Не теряя общности можно считать, что $a = b$, т. е. $f(a) = \Phi_{\lambda,k,\beta}(a)$. Будем также считать, что $\Phi'_{\lambda,k,\beta}(a) \neq 0$, так как в противном случае точка a — экстремум для функции $\Phi_{\lambda,k,\beta}(\cdot)$ и в силу того, что $\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_{\lambda,k,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$ точка a экстремум и для функции $f(\cdot)$, а тогда $f'(a) = 0$ и утверждение очевидно выполнено.

Предположим противное, а именно, что $|f'(a)| > |\Phi'_{\lambda,k,\beta}(a)|$. Предположим для определенности, что $\Phi_{\lambda,k,\beta}(a) > 0$ и $\Phi'_{\lambda,k,\beta}(a) > 0$ (остальные случаи рассматриваются по такой же схеме). Без ограничения общности можно считать, что $f'(a) > 0$ (в случае $f'(a) = 0$ утверждение очевидно). Таким образом, функция $\Phi_{\lambda,k,\beta}(\cdot)$ возрастает на промежутке $[a, x_0]$, где x_0 — ближайший справа ее максимум, и вогнута (см. рис. 4.9.3).

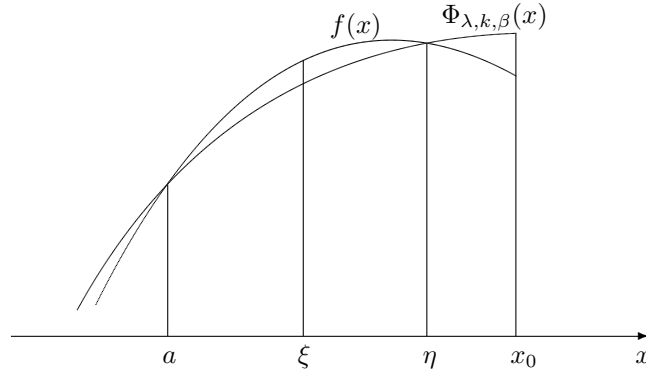


Рис. 4.9.3

Так как $f'(a) > \Phi'_{\lambda,k,\beta}(a)$, а

$$f(x_0) \leq \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_{\lambda,k,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \Phi_{\lambda,k,\beta}(x_0),$$

то в некоторой точке $\eta \in (a, x_0]$ будет $f(\eta) = \Phi_{\lambda,k,\beta}(\eta)$. Отсюда

$$\int_a^\eta (f'(x) - \Phi'_{\lambda,k,\beta}(x)) dx = 0.$$

Следовательно, разность $f'(x) - \Phi'_{\lambda,k,\beta}(x)$ в некоторой точке $\xi \in (a, \eta)$ должна обратиться в нуль. Итак, имеем

$$f'(a) > \Phi'_{\lambda,k,\beta}(a), \quad f'(\xi) = \Phi'_{\lambda,k,\beta}(\xi),$$

при этом функция $\Phi'_{\lambda,k,\beta}(\cdot)$ — вогнута на интервале (a, ξ) и строго убывает. Положим

$$g(x) = f'(2a - x), \quad \varphi(x) = \Phi'_{\lambda,k,\beta}(2a - x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} g(a) &= f'(a) > \Phi'_{\lambda,k,\beta}(a) = \varphi(a), \\ g(2a - \xi) &= f'(\xi) = \Phi'_{\lambda,k,\beta}(\xi) = \varphi(2a - \xi). \end{aligned}$$

Тогда по лемме 4.28 (условие a) существуют точки $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (2a - \xi, a)$ такие, что $g(\tilde{\alpha}) = \varphi(\tilde{\beta})$ и $g'(\tilde{\alpha}) > \varphi'(\tilde{\beta})$. Переходя к функциям $f'(\cdot)$ и $\Phi'_{\lambda,k,\beta}(\cdot) = \Phi_{\lambda,k-1,\beta}(\cdot)$, получим

$$f'(2a - \tilde{\alpha}) = \Phi_{\lambda,k-1,\beta}(2a - \tilde{\beta}), \quad -f''(2a - \tilde{\alpha}) > -\Phi'_{\lambda,k-1,\beta}(2a - \tilde{\beta}).$$

Из того, что $\Phi'_{\lambda,k-1,\beta}(2a - \tilde{\beta}) < 0$ следует, что

$$|f''(2a - \tilde{\alpha})| > |\Phi'_{\lambda,k-1,\beta}(2a - \tilde{\beta})|,$$

что противоречит предположению индукции. $\square$

ТЕОРЕМА 4.30. Пусть $f(\cdot) \in H_{\infty}^r(S_{\beta})$, $r \geq 0$, и при некотором $\lambda \in (0, 1)$ выполнено неравенство (4.65). Тогда при всех $1 \leq k \leq r + 1$

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_{\lambda,r,\beta}^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что достаточно доказать утверждение для $k = 1$. Предположим, что $\|f'(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} > \|\Phi'_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$. Тогда найдется точка $a \in \mathbb{R}$, для которой $|f'(a)| > \|\Phi'_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$. Без ограничения общности можно считать, что $f'(a) > 0$. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z) + \overline{f(\bar{z})}}{2}.$$

Очевидно, что $f_1(\cdot) \in H_{\infty}^{r,\mathbb{R}}(S_{\beta})$ и удовлетворяет неравенству (4.65). Выберем точку $b \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\Phi_{\lambda,r,\beta}(b) = f_1(a)$. Тогда $f_1'(a) = f'(a) > \|\Phi'_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \geq \Phi'_{\lambda,r,\beta}(b)$, что противоречит теореме 4.29. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.25. Положим $\Phi_{\lambda,-1,\beta}(\cdot) = \Phi'_{\lambda,0,\beta}(\cdot)$. Тогда

$$\Phi_{\lambda,r,\beta}^{(k)}(\cdot) = \Phi_{\lambda,r-k,\beta}(\cdot), \quad k = 1, \dots, r + 1.$$

Легко убедиться, что равенства (4.55) остаются справедливыми и для $r = -1$. Тем самым, используя теорему 4.30, достаточно доказать существование $\lambda \in (0, 1)$, удовлетворяющего равенству (4.58). Так как

$$\|\Phi_{\lambda,0,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \sqrt{\lambda},$$

то при $r = 0$ $\lambda = \delta^2$.

Пусть $r \geq 1$. Тогда из (4.55) вытекает, что $\|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$ непрерывно зависит от λ . Если $\lambda \rightarrow 0$, то $\Lambda' \rightarrow \infty$, $\Lambda \rightarrow \pi/2$ и, кроме того,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt{\lambda} \exp\left(\frac{\pi\Lambda'}{4\Lambda}\right) = \frac{1}{2}$$

(см. (8.55)). Отсюда получаем, что для всех $j \geq 0$

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{sh}\left((2j+1)\frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right) \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Если $\lambda \rightarrow 1$, то $\Lambda' \rightarrow \pi/2$, а $\Lambda \rightarrow \infty$. В этом случае из (4.55) вытекает, что $\|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \rightarrow \infty$. $\square$

В силу равенств (4.52) и (4.53) из теоремы 4.25 вытекает, что

$$\begin{aligned} E(f^{(k)}(t), H_{\infty}^r(S_{\beta}), F_{\delta}(\mathbb{R})) \\ = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda} \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^{r-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(r-k+1)}}{(2n+1)^{r-k} \operatorname{sh}\left((2n+1), \frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)}, \end{aligned}$$

где λ удовлетворяет равенству (4.58).

Рассмотрим обобщенные константы Фавара

$$K_{r,\lambda} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(r+1)}}{(2n+1)^r \operatorname{sh}\left((2n+1), \frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)}, \quad \lambda \in (0, 1), \quad r = -1, 0, 1, 2, \dots$$

В силу того, что $\Lambda' \rightarrow \pi/2$, а $\Lambda \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow 1$, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \Lambda \operatorname{sh} \left((2n+1) \frac{\pi \Lambda'}{2\Lambda} \right) = \frac{\pi^2}{4} (2n+1).$$

Тем самым $K_{r,\lambda} \rightarrow K_r$ при $\lambda \rightarrow 1$ и $r = 0, 1, 2, \dots$

Из (4.56) следует, что

$$\|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'} \right)^r K_{r,\lambda}.$$

Исходя из этого равенства, нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} K_{-1,\lambda} &= \frac{2\sqrt{\lambda}\Lambda}{\pi}, \\ K_{0,\lambda} &= \sqrt{\lambda}, \\ K_{1,\lambda} &= \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}\Lambda} \ln \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.31. Пусть $r \geq 1$. Тогда для всех $1 \leq k \leq r+1$ и любой функции $f(\cdot)$, аналитической и ограниченной в полосе S_β , не равной тождественно нулю, справедливо неравенство

$$(4.68) \quad \|f^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{r-k,\lambda}}{K_{r,\lambda}^{1-k/r}} \|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}^{1-k/r} \|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}^{k/r},$$

где λ определяется из условия

$$(4.69) \quad \|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f(\cdot)$ аналитическая и ограниченная в полосе S_β , отлична от тождественного нуля. Положим

$$\delta = \frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}}.$$

Применяя к функции

$$\frac{f(\cdot)}{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}} \in H_\infty^r(S_\beta)$$

теорему 4.25, будем иметь

$$(4.70) \quad \|\Phi_{\lambda,r,\beta}^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'} \right)^{r-k} K_{r-k,\lambda}.$$

Из равенств

$$\|\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'} \right)^r K_{r,\lambda} = \frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}}$$

получаем

$$\left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'} \right) = \left(\frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{K_{r,\lambda} \|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}} \right)^{1/r}.$$

Подставляя это выражение в (4.70) имеем

$$\frac{\|f^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}} \leq K_{r-k,\lambda} \left(\frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{K_{r,\lambda} \|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}} \right)^{1-k/r}.$$

Отсюда вытекает неравенство (4.68). $\square$

Отметим, что в отличие от неравенства Колмогорова здесь величина

$$\frac{K_{r-k,\lambda}}{K_{r,\lambda}^{1-k/r}}$$

не является постоянной. Она зависит от значения λ , которое, в свою очередь, зависит от функции $f(\cdot)$ (см. (4.69)).

Если выбрать $\lambda \in (0, 1)$ из условия

$$\beta = \frac{\pi\Lambda'}{4\Lambda} \left(\frac{\|f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}}{K_{r,\lambda}\|f^{(r)}(\cdot)\|_{C(S_\beta)}} \right)^{1/r},$$

то равенство (4.69) будет выполнено. Тем самым неравенство (4.68) будет иметь место. Устремим β к нулю. При этом ширина полосы устремится к нулю, а λ будет стремиться к единице. Тогда неравенство (4.68) при $1 \leq k \leq r-1$ перейдет в неравенство Колмогорова.

4.10. Комментарии

4.1. Теорема 4.1 была доказана в работах С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin, S. Winograd [17] и Р. W. Gaffney, М. J. D. Powell [8]. Приводимое доказательство, основанное на методе параметризации (теорема 2.11) и позволяющее доказать единственность оптимального метода, было предложено в работе К. Ю. Осипенко [20]. Результаты об оптимальном восстановлении гладких функций по их значениям в системе узлов, заданным с погрешностью получены в работе С. А. Micchelli [14].

4.2. Задача о совершенных сплайнах, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной метрике (теорема 4.2) была решена В. М. Тихомировым [98].

4.3. Оптимальный метод восстановления на классе H_∞ был построен К. Ю. Осипенко [75], [76]. Общий случай $1 \leq p \leq \infty$ был рассмотрен в работе S. D. Fisher, С. А. Micchelli [6]. Ряд результатов, связанных с оптимальным восстановлением функций из класса H_∞ по неточно заданным значениям в узлах можно найти в работах К. Ю. Осипенко [78] и [79].

4.4. Задача минимизации произведений Бляшке в равномерной норме на отрезке из интервала $(-1, 1)$ была решена в работе К. Ю. Осипенко [75]. Аналогичная задача для метрики $L_q(T_\rho, \sigma_\rho)$ была решена О. Г. Парфеновым [91]. Доказательство теоремы 4.11 основано на идеях К. И. Бабенко [33] и Л. В. Тайкова [96]. Ряд результатов о минимизации произведений Бляшке в интегральных метриках можно найти в работе К. Ю. Осипенко [80]. Минимизация норм произведений Бляшке тесно связана с задачами нахождения значений n -поперечников классов аналитических функций. Более полную информацию об этой связи можно найти в работах S. D. Fisher, С. А. Micchelli [6], А. Pinkus [27], Yu. A. Farkov [4].

4.5. Теорема 4.13 вытекает из результатов, доказанных в работе S. D. Fisher [5]. Теорема 4.14 доказана в работе К. Ю. Осипенко [84].

4.6. Содержание этого раздела взято из работы К. Ю. Осипенко [83]. Лемма 4.18 в менее общей форме была доказана в работе К. Ю. Осипенко, М. И. Стесина [90].

4.7. Задача оптимального восстановления производной функции $f \in H_\infty$ была решена в работе С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin [15]. Общий случай $1 \leq p \leq \infty$ был получен в работе К. Ю. Осипенко, М. И. Стесина [89].

4.7. Теорема 4.23 доказана в работе К. Ю. Осипенко, М. И. Стесина [90].

4.8. Функции $\Phi_{\lambda,r,\beta}(\cdot)$ были введены в работе К. Ю. Осипенко [82]. Эти функции являются аналогами идеальных сплайнов Эйлера (см., например, Н. П. Корнейчук [47]). Материал этого раздела взят в основном из работы

К. Ю. Осипенко [82]. Лемма 4.28 взята из книги Н. П. Корнейчука [46]. Доказательство теоремы сравнения для аналитических функций (теорема 4.29) проведено по той же схеме, которая применялась для гладких функций в книге Н. П. Корнейчука [46].

Оптимальное восстановление сигналов

Под восстановлением сигналов мы будем понимать восстановление функции и ее производных по ее неточно заданному преобразованию Фурье.

5.1. Регуляризация по Тихонову

Пусть функция $x(\cdot)$ такова, что ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

равномерно сходится на $\mathbb{T}$. Предположим, что вместо точных значений коэффициентов Фурье этой функции a_k , $k = 0, 1, \dots$, и b_k , $k = 1, 2, \dots$, нам известны их приближенные значения $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ такие, что

$$(5.1) \quad \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2) \leq \delta^2,$$

где $\delta > 0$ характеризует погрешность задания коэффициентов Фурье. Задача состоит в восстановлении значения функции $x(\cdot)$ в данной точке t . Похожие задачи для восстановления производной функции рассматривались в пп. 1.5 и 2.6.

Покажем, что при замене точных значений коэффициентов Фурье приближенными невозможно восстановить значение функции, какова бы малой ни была погрешность задания исходных данных. Действительно, пусть

$$\tilde{a}_0 - a_0 = 0, \quad \tilde{a}_k - a_k = \tilde{b}_k - b_k = \frac{\delta}{C\sqrt{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Тогда неравенство (5.1) выполнено, а разность между значением исходной функции в точке t и рядом

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$$

равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - \tilde{a}_k) \cos kt + (b_k - \tilde{b}_k) \sin kt).$$

При $t = 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Тем не менее можно предложить метод восстановления, погрешность которого будет стремиться к нулю при стремлении к нулю погрешности, с которой задаются приближенные коэффициенты Фурье.

ТЕОРЕМА 5.1 (А. Н. Тихонова). Пусть $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и непрерывна в фиксированной точке $t \in \mathbb{T}$. Тогда сумма ряда

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\alpha} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt),$$

где $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ — приближенные значения коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$, удовлетворяющие условию (5.1), а $\alpha = \delta C(\delta)$, $0 < C_1 \leq C(\delta) \leq C_2$, совпадает со значением $x(t)$ с погрешностью, стремящейся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha(\delta) = \delta$ (общий случай рассматривается совершенно аналогично). Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \delta < \delta_0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\delta} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt) - x(t) \right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем сначала, что найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех положительных $\delta < \delta_1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\delta} \left((\tilde{a}_k - a_k) \cos kt + (\tilde{b}_k - b_k) \sin kt \right) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Для этого достаточно убедиться, что сумма, стоящая в левой части стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Разобьем эту сумму на две части. В первую часть отнесем слагаемые с номерами k , для которых $k < 1/\delta$, а во вторую — все остальные. Применяя к каждой части неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} (5.2) \quad & \left| \frac{a_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\delta} \left((\tilde{a}_k - a_k) \cos kt + (\tilde{b}_k - b_k) \sin kt \right) \right| \\ & \leq \sqrt{\left(\frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k < 1/\delta} \left((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \right) \right) O\left(\frac{1}{\delta}\right)} \\ & \quad + \sqrt{\sum_{k \geq 1/\delta} \left((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \right) \sum_{k \geq 1/\delta} \frac{1}{k^4\delta^2}}. \end{aligned}$$

Оценивая сумму несобственным интегралом, получаем, что

$$\sum_{k \geq 1/\delta} \frac{1}{k^4} = O(\delta^3).$$

Тем самым в правой части (5.2) стоит величина $O(\sqrt{\delta}) + O(\delta^{3/2})$, стремящаяся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Остается доказать, что найдется число $\delta_2 > 0$ такое, что для всех положительных $\delta < \delta_2$ будет справедливо неравенство

$$(5.3) \quad \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\delta} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) - x(t) \right| < \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Так как функция $x(\cdot)$ непрерывна в точке t , то для заданного ε найдется $\eta > 0$ такое, что для всех s , удовлетворяющих условию $|s - t| < \eta$, будет

справедливо неравенство

$$(5.4) \quad |x(s) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим $\gamma = \delta^{-1/2}$ и рассмотрим функцию

$$v_t(s) = \begin{cases} \frac{\gamma\pi}{2} e^{-\gamma|t-s|}, & t - \eta < s < t + \eta, \\ 0, & t + \eta \leq s \leq t - \eta + 2\pi \end{cases}$$

(не ограничивая общности, можно считать, что $\eta < \pi$). Продолжим эту функцию периодически с периодом 2π на всю прямую $-\infty < s < +\infty$. Вычислим коэффициенты Фурье функции $v_t(\cdot)$. Имеем

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{t-\eta}^{t+\eta} v_t(s) \cos ks \, ds = \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} \cos ks \, ds \\ &= \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} \cos k(t+u) \, du = \frac{\gamma}{2} \cos kt \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} \cos ku \, du \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \sin kt \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} \sin ku \, du = \gamma \cos kt \int_0^{\eta} e^{-\gamma u} \cos ku \, du \\ &= \gamma \cos kt \left(\frac{e^{-\gamma u}}{k^2 + \gamma^2} (k \sin ku - \gamma \cos ku) \right) \Big|_0^{\eta} = \frac{\gamma^2}{k^2 + \gamma^2} \cos kt + e^{-\gamma\eta} \sigma_k \gamma \cos kt, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_k = \frac{k \sin k\eta - \gamma \cos k\eta}{k^2 + \gamma^2}.$$

Учитывая, что $\gamma = \delta^{-1/2}$, получаем

$$A_k = \frac{\cos kt}{1 + k^2\delta} + e^{-\gamma\eta} \sigma_k \gamma \cos kt.$$

Аналогичные вычисления дают:

$$B_k = \frac{\sin kt}{1 + k^2\delta} + e^{-\gamma\eta} \sigma_k \gamma \sin kt.$$

Так как $x(\cdot), v_t(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s) x(s) \, ds = \frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k + B_k b_k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2\delta} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) - x(t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s) x(s) \, ds - x(t) - \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta} \sigma_0 \gamma - \gamma e^{-\gamma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| \end{aligned}$$

Теперь для доказательства (5.3) достаточно доказать, что для всех достаточно малых положительных δ будут выполнены неравенства

$$(5.5) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s) x(s) \, ds - x(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(5.6) \quad \left| \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta} \sigma_0 \gamma + \gamma e^{-\gamma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Докажем неравенство (5.5). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds &= \frac{1}{\pi} \int_{t-\eta}^{t-\eta+2\pi} v_t(s)x(s) ds = \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} x(s) ds \\ &= x(t) \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} ds + \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} (x(s) - x(t)) ds. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} ds = \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} du = \gamma \int_0^{\eta} e^{-\gamma u} du = 1 - e^{-\gamma\eta},$$

а также того, что при $s \in (t - \eta, t + \eta)$ выполнено неравенство (5.4), получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds - x(t) \right| \leq e^{-\gamma\eta} |x(t)| + \frac{\varepsilon}{4} (1 - e^{-\gamma\eta}) \leq e^{-\gamma\eta} |x(t)| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как при всех достаточно малых δ справедливо неравенство

$$e^{-\gamma\eta} |x(t)| = e^{-\eta/\sqrt{\delta}} |x(t)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

то неравенство (5.5) доказано.

Остается доказать неравенство (5.6). Нетрудно убедиться, что

$$|\sigma_k| \leq \frac{2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для σ_0 при достаточно малых δ выполняется неравенство $|\sigma_0| \leq 1$. Применяя к левой части (5.6) неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} (5.7) \quad & \left| \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta} \sigma_0 \gamma + \gamma e^{-\gamma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| \\ & \leq \gamma e^{-\gamma\eta} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \gamma e^{-\gamma\eta} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma e^{-\gamma\eta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\eta/\sqrt{\delta}}}{\sqrt{\delta}} = 0,$$

то правая часть (5.7) для достаточно малых δ может быть сделана меньше $\varepsilon/4$. $\square$

5.2. Регуляризация по Колмогорову

Подход, который мы называем регуляризацией по Колмогорову, предполагает наличие некоторой априорной информации о функции $x(\cdot)$. Но тогда появляется возможность учитывать имеющуюся фиксированную точность измерения и ставить вопрос о нахождении наилучшего метода среди всех возможных. Этот подход соответствует общему подходу, развиваемому в рамках теории оптимального восстановления.

Перейдем к точной постановке задачи. Обозначим через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ пространство абсолютно непрерывных 2π -периодических функций $x(\cdot)$, у которых производная $x'(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{T})$. Если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то в каждой точке $t \in \mathbb{T}$ функция $x(\cdot)$ разлагается в ряд Фурье, который сходится к ней равномерно.

В пространстве $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) = \{ x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) : \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1 \}.$$

Обозначим через l_2 пространство суммируемых с квадратом вещественных последовательностей со скалярным произведением

$$\langle y, y' \rangle = \frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k y'_k,$$

где $y = (y_0, y_1, \dots)$, $y' = (y'_0, y'_1, \dots)$ и с соответствующей нормой

$$\|y\|_{l_2} = \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Если функция $x(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то ее коэффициенты Фурье принадлежат l_2 . Пусть $F: \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow l_2$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$, т. е. $Fx(\cdot) = (a_0(x(\cdot)), a_1(x(\cdot)), b_1(x(\cdot)), \dots)$ — набор коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$.

Предположим, что о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны приближенно ее коэффициенты Фурье, а именно, известен вектор

$$y = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots) \in l_2$$

такой, что

$$\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta,$$

где $\delta > 0$.

Любой метод восстановления $x(\tau)$ должен сопоставлять вектору (наблюдению) y число, которое, согласно данному методу, есть некоторое приближение к $x(\tau)$. Таким образом, любой метод — это некоторая функция $\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$. *Погрешностью* данного метода назовем величину

$$(5.8) \quad e(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), \quad y \in l_2 \\ \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Нас интересует величина

$$(5.9) \quad E(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = \inf_{\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}} e(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\hat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любого $\delta > 0$

$$E(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = (\hat{a} + \delta^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \hat{a}k^2)^2} \right)^{1/2},$$

где $\hat{a} = \hat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения

$$\frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} = \delta^2.$$

Метод

$$(5.10) \quad \hat{\varphi}(y) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \hat{a}k^2} (\tilde{a}_k \cos k\tau + \tilde{b}_k \sin k\tau),$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем применять теорему 2.8. Покажем, что существует функция $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ такая, что $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{l_2} = \delta$, $\|\widehat{x}'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$, и для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ справедливо равенство

$$(5.11) \quad x(\tau) = \lambda_1 \langle F\widehat{x}(\cdot), Fx(\cdot) \rangle + \lambda_2 \langle Fx'(\cdot), Fx(\cdot) \rangle,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Пусть $Fx(\cdot) = (a_0, a_1, b_1, \dots)$, $F\widehat{x}(\cdot) = (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \widehat{b}_1, \dots)$. Тогда равенство (5.11) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) &= \lambda_1 \left(\frac{\widehat{a}_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k a_k + \widehat{b}_k b_k) \right) \\ &+ \lambda_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\widehat{a}_k a_k + \widehat{b}_k b_k). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\widehat{a}_0 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \widehat{a}_k = \frac{\cos k\tau}{\lambda_1 + \lambda_2 k^2}, \quad \widehat{b}_k = \frac{\sin k\tau}{\lambda_1 + \lambda_2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выберем λ_1 и λ_2 так, чтобы

$$\begin{aligned} \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{l_2}^2 &= \frac{\widehat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = \delta^2, \\ \|\widehat{x}'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \|F\widehat{x}'(\cdot)\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = 1. \end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda_1^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 k^2)^2} &= \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 k^2)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Обозначая $a = \lambda_2/\lambda_1$ и деля первое уравнение на второе, получаем уравнение для нахождения a

$$(5.12) \quad \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} = \delta^2.$$

Выражение в левой части (5.12) определяет функцию $f(a)$, $a \in (0, \infty)$. Покажем, что для любого $\delta > 0$ существует единственное $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta) > 0$ такое, что $f(\widehat{a}) = \delta^2$. Для этого сначала докажем, что $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $n \geq 6$ таково, что $1/n < \varepsilon$. Так как, очевидно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + ak^2)^2} \right) = \frac{1}{2} + n < 2n + 1$$

и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} > n(2n+1),$$

то существует такое $\tilde{a} > 0$, что для всех $0 < a < \tilde{a}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+ak^2)^2} < 2n+1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} > n(2n+1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+ak^2)^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}.$$

Далее, ясно, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}.$$

Складывая полученные неравенства и затем деля одно на другое, получаем, что для всех $0 < a < \tilde{a}$

$$f(a) = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$.

С другой стороны, для любого $a > 0$

$$f(a) = \frac{\frac{a^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^{-1} + k^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^{-1} + k^2)^2}} > \frac{a^2}{2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}},$$

откуда сразу следует, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$.

Для доказательства единственности покажем, что $f(\cdot)$ строго монотонно возрастает на $(0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что она строго монотонно возрастает на любом отрезке $[\tilde{a}_0, \tilde{a}_1]$, где $0 < \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \infty$. На каждом таком отрезке выполнены стандартные условия о почленном дифференцировании рядов, входящих в определение $f(\cdot)$, и мы имеем для $a \in [\tilde{a}_0, \tilde{a}_1]$

$$f'(a) = \frac{2g(a)}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} \right)^2},$$

где

$$\begin{aligned} g(a) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} + \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(1+ak^2)^3} \\ &> - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(1+ak^2)^3} \\ &= - \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} + \sum_{j,k=1}^{\infty} \beta_{jk}, \end{aligned}$$

а

$$\alpha_{jk} = \frac{j^2 k^2}{(1+aj^2)^3 (1+ak^2)^2}, \quad \beta_{jk} = \frac{k^4}{(1+aj^2)^2 (1+ak^2)^3}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -\alpha_{jk} + \beta_{kj} &= \frac{j^2(j^2 - k^2)}{(1 + aj^2)^3(1 + ak^2)^2}, \\ -\alpha_{kj} + \beta_{jk} &= \frac{k^2(k^2 - j^2)}{(1 + ak^2)^3(1 + aj^2)^2} \end{aligned}$$

и тогда получаем, что

$$\begin{aligned} -\alpha_{jk} + \beta_{kj} - \alpha_{kj} + \beta_{jk} &= \frac{j^2 - k^2}{(1 + aj^2)^2(1 + ak^2)^2} \left(\frac{j^2}{1 + aj^2} - \frac{k^2}{1 + ak^2} \right) \\ &= \frac{(j^2 - k^2)^2}{(1 + aj^2)^3(1 + ak^2)^3} \geq 0. \end{aligned}$$

Тем самым $g(a) > 0$ и значит, $f'(a) > 0$ для любого $a \in (0, \infty)$. Единственность доказана.

Пусть $\delta > 0$ и $\hat{a} = \hat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения $f(a) = \delta^2$. Полагаем

$$\lambda_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \hat{a}k^2)^2} \right)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = \hat{a} \lambda_1.$$

Из теоремы 2.8 вытекает, что

$$\begin{aligned} E(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) &= \lambda_2 \|F\hat{x}'(\cdot)\|_{l_2} + \delta \lambda_1 \|F\hat{x}(\cdot)\|_{l_2} = \lambda_2 + \lambda_1 \delta^2 \\ &= (\hat{a} + \delta^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \hat{a}k^2)^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а метод (5.10) является оптимальным. $\square$

5.3. Задание коэффициентов Фурье с погрешностью в равномерной метрике

С практической точки зрения достаточно естественной представляется ситуация, когда имеется возможность измерить приближенно каждый из некоторого конечного набора коэффициентов Фурье функции. Обозначим через $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$, $r \geq 1$, множество 2π -периодических функций с абсолютно непрерывными производными $x^{(r)}(\cdot)$, удовлетворяющих условию $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. В пространстве $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Будем рассматривать задачу оптимального восстановления значения $x(\tau)$, $\tau \in \mathbb{T}$, на классе $W_2^r(\mathbb{T})$ по информации о неточно заданных коэффициентах Фурье a_k , $k \in A$, и b_k , $k \in B$, где A и B некоторые конечные подмножества $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ и $\mathbb{N}$ соответственно. Таким образом, вместо значений a_k , $k \in A$, и b_k , $k \in B$, нам известны $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ такие, что

$$|a_k - \tilde{a}_k| \leq \delta, \quad k \in A, \quad |b_k - \tilde{b}_k| \leq \delta, \quad k \in B.$$

Положим $N = \text{card } A + \text{card } B$ и

$$F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_k\}_{k \in A}, \{b_k\}_{k \in B}).$$

Обозначим через l_∞^N пространство векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$ с нормой

$$\|y\|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leq k \leq N} |y_k|.$$

Итак, для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ нам известен вектор

$$y = (\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B})$$

такой, что

$$\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_\infty^N} \leq \delta.$$

Аналогично (5.8) и (5.9) вводятся величины

$$\begin{aligned} e(x(\tau), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), y \in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_\infty^N} \leq \delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|, \\ E(x(\tau), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) &= \inf_{\varphi: l_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}} e(x(\tau), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi), \end{aligned}$$

называемые *погрешностью метода* и *погрешностью оптимального восстановления*.

Нетрудно убедиться, что если $0 \notin A$, то погрешность оптимального восстановления равна бесконечности (достаточно рассмотреть лишь константы из класса $W_2^r(\mathbb{T})$). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $0 \in A$.

Положим $\tilde{A} = A \setminus \{0\}$ и рассмотрим вектор

$$\left(\left\{ \frac{\cos k\tau}{k^{2r}} \right\}_{k \in \tilde{A}}, \left\{ \frac{\sin k\tau}{k^{2r}} \right\}_{k \in B} \right).$$

Пусть

$$(5.13) \quad |\gamma_2| \geq \dots \geq |\gamma_N|$$

— модули компонентов этого вектора, упорядоченные по убыванию. Если $\gamma_s = k_s^{-2r} \cos k_s \tau$, то соответствующий индекс будем обозначать через $k_s(A)$, а если $\gamma_s = k_s^{-2r} \sin k_s \tau$, то — через $k_s(B)$. Для каждого $2 \leq s \leq N$ обозначим через A_s и B_s подмножества индексов $k_2(C), \dots, k_s(C)$ при $C = A$ и $C = B$ соответственно. Для удобства обозначений будем считать, что $A_1 = B_1 = \emptyset$ (сумма по пустому множеству индексов будет считаться равной нулю).

Положим

$$\begin{aligned} p = \max \left\{ s : \gamma_s^2 \left(1 - \delta^2 \sum_{k \in A_s \cup B_s} k^{2r} \right) \right. \\ \left. > \delta^2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A_s} \frac{\cos^2 k\tau}{k^{2r}} + \delta^2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B_s} \frac{\sin^2 k\tau}{k^{2r}}, \quad 2 \leq s \leq N \right\} \end{aligned}$$

(считая $p = 1$, если таких s нет),

$$\lambda = \left(\frac{\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A_p} \frac{\cos^2 k\tau}{k^{2r}} + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B_p} \frac{\sin^2 k\tau}{k^{2r}}}{1 - \delta^2 \sum_{k \in A_p \cup B_p} k^{2r}} \right)^{1/2},$$

и

$$\lambda_s = k_s^{2r}(C)(|\gamma_s| - \lambda\delta), \quad \tilde{c}_s = \begin{cases} \text{sign } \gamma_s \tilde{a}_{k_s(C)}, & C = A, \\ \text{sign } \gamma_s \tilde{b}_{k_s(C)}, & C = B. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5.3. Для любого $\delta > 0$

$$E(x(\tau), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^p \lambda_s + \lambda,$$

а метод

$$(5.14) \quad \widehat{m}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{s=2}^p \lambda_s \widetilde{c}_s$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим последовательности $\widehat{a}_k$ и $\widehat{b}_k$ по правилу

$$\widehat{a}_k = \begin{cases} \delta \operatorname{sign} \cos k\tau, & k \in A_p \cup 0; \\ \frac{\cos k\tau}{\lambda k^{2r}}, & k \notin A_p \cup 0. \end{cases} \quad \widehat{b}_k = \begin{cases} \delta \operatorname{sign} \sin k\tau, & k \in B_p; \\ \frac{\sin k\tau}{\lambda k^{2r}}, & k \notin B_p. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$(5.15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = 1.$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \frac{\widehat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k \cos kt + \widehat{b}_k \sin kt).$$

Из (5.15) вытекает, что $\|\widehat{x}^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$. Следовательно, $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$.

Воспользуемся следствием 2.7. Достаточно проверить выполнение условий (i)–(iii). Начнем с условия (iii). Покажем, что $\|F_{A,B}\widehat{x}(\cdot)\|_{l_\infty^N} \leq \delta$. Нам надо показать, что $|\widehat{a}_k| \leq \delta$ для всех $k \in A$ и $|\widehat{b}_k| \leq \delta$ для всех $k \in B$. Если $p = N$, то это очевидно. Пусть $p < N$. Если при некотором $k > 0$ и $k \in A \setminus A_p$ выполняется неравенство $|\widehat{a}_k| > \delta$ или при некотором $k \in B \setminus B_p$ выполняется неравенство $|\widehat{b}_k| > \delta$, то существует γ_s , $p < s \leq N$, для которого

$$\gamma_s^2 > \delta^2 \lambda^2.$$

В силу (5.13) отсюда вытекало бы неравенство

$$(5.16) \quad \gamma_{p+1}^2 > \delta^2 \lambda^2.$$

Предположим, что

$$\gamma_{p+1}^2 = \frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^{4r}(A)}.$$

Тогда неравенство (5.16) можно записать так

$$\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^{4r}(A)} \left(1 - \delta^2 \sum_{k \in A_p \cup B_p} k^{2r}\right) > \delta^2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A_p} \frac{\cos^2 k\tau}{k^{2r}} + \delta^2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B_p} \frac{\sin^2 k\tau}{k^{2r}}.$$

Поскольку $A_{p+1} = A_p \cup \{k_{p+1}(A)\}$, а $B_{p+1} = B_p$, то последнее неравенство записывается в виде

$$\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^{4r}(A)} \left(1 - \delta^2 \sum_{k \in A_{p+1} \cup B_{p+1}} k^{2r}\right) > \delta^2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A_{p+1}} \frac{\cos^2 k\tau}{k^{2r}} + \delta^2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B_{p+1}} \frac{\sin^2 k\tau}{k^{2r}}.$$

Но такое неравенство противоречит определению p . Случай, когда

$$\gamma_{p+1}^2 = \frac{\sin^2 k_{p+1}(B)\tau}{k_{p+1}^{4r}(B)},$$

рассматривается аналогично.

Докажем, что для любых последовательностей $\{a_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, и $\{b_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

имеет место тождество

$$(5.17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) = \sum_{s=2}^p \lambda_s c_s + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (\hat{a}_k a_k + \hat{b}_k b_k),$$

где

$$c_s = \begin{cases} \text{sign } \gamma_s a_{k_s(C)}, & C = A, \\ \text{sign } \gamma_s b_{k_s(C)}, & C = B. \end{cases}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^p \lambda_s c_s + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (\hat{a}_k a_k + \hat{b}_k b_k) &= \sum_{s=2}^p k_s^{2r}(C) |\gamma_s| c_s - \lambda \delta \sum_{s=2}^p k_s^{2r}(C) c_s \\ &+ \lambda \delta \sum_{s=2}^p k_s^{2r}(C) c_s + \lambda \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A_p} k^{2r} \frac{\cos k\tau}{\lambda k^{2r}} a_k + \lambda \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B_p} k^{2r} \frac{\sin k\tau}{\lambda k^{2r}} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau). \end{aligned}$$

Из (5.17) вытекает, что для всех $x \in W_2^r(\mathbb{T})$

$$x(\tau) - \hat{m}(F_{A,B}x(\cdot)) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (\hat{a}_k a_k + \hat{b}_k b_k).$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|x(\tau) - \hat{m}(F_{A,B}x(\cdot))| \leq \lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \leq \lambda.$$

С другой стороны,

$$\hat{x}(\tau) - \hat{m}(F_{A,B}\hat{x}(\cdot)) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) = \lambda.$$

Следовательно, условие (i) выполнено.

Из определения p вытекает, что $\lambda_p > 0$. В силу (5.13) имеем $\lambda_s > 0$, $s = 2, \dots, p-1$. Тем самым

$$\hat{m}(F_{A,B}\hat{x}(\cdot)) = \delta \left(\frac{1}{2} + \sum_{s=2}^p \lambda_s \right) = \delta \|\hat{m}\|.$$

Это означает, что условие (ii) выполнено. Теперь утверждение теоремы вытекает из следствия 2.7. $\square$

5.4. Восстановление функции и ее производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в метрике l_2^N

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ по информации о неточно заданных коэффициентах Фурье a_k , $k \in A$, и b_k , $k \in B$, где A и B некоторые конечные подмножества $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ и $\mathbb{N}$ соответственно. Сохраним обозначения для N и $F_{A,B}x(\cdot)$ из предыдущего раздела. Обозначим через l_2^N множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$ с нормой

$$\|y\|_{l_2^N} = (|y_1|^2 + \dots + |y_N|^2)^{1/2}.$$

В случае, если $0 \notin A$, будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ нам известен вектор

$$y = (\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B})$$

такой, что

$$\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_2^N} \leq \delta.$$

Если $0 \in A$, то под нормой в l_2^N будем понимать величину

$$\|y\|_{l_2^N} = (|y_1|^2/2 + |y_2|^2 + \dots + |y_N|^2)^{1/2}.$$

Введем величину, называемую *погрешностью метода восстановления* $\varphi: l_2^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$

$$e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), y \in l_2^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

и величину, называемую *погрешностью оптимального восстановления*

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi: l_2^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем *оптимальным*.

Из леммы 2.1 следует, что

$$(5.18) \quad E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}) \\ \|F_{A,B}x(\cdot)\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$, т.е. восстановление самой функции по неточно заданным коэффициентам Фурье. Положим

$$(5.19) \quad n_0 = \min \left\{ \min_{n \in \mathbb{N} \setminus A} n, \min_{n \in \mathbb{N} \setminus B} n \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5.4. Если $0 \notin A$, то

$$E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty.$$

Если $0 \in A$, то

$$(5.20) \quad E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}}$$

и для любых наборов чисел $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ таких, что

$$(5.21) \quad \frac{n_0^{2r} - j^{2r}}{n_0^{2r} + j^{2r}} \leq \alpha_j \leq 1, \quad j \in A \setminus \{0\}, \quad \frac{n_0^{2r} - j^{2r}}{n_0^{2r} + j^{2r}} \leq \beta_j \leq 1, \quad j \in B,$$

методы

$$(5.22) \quad \varphi_{\alpha, \beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} \alpha_j \tilde{a}_j \cos jt + \sum_{j \in B} \beta_j \tilde{b}_j \sin jt$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу в правой части (5.18) (для удобства мы переходим к квадратам). Используя равенство Парсеваля, имеем

$$(5.23) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) \rightarrow \max, \quad \|F_{A,B}x(\cdot)\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Отсюда видно, что если $0 \notin A$, то погрешность оптимального восстановления равна бесконечности (достаточно рассмотреть лишь константы из класса $W_2^r(\mathbb{T})$).

Пусть $0 \in A$. Пусть для определенности $n_0 \notin A$ (случай, когда $n_0 \in B$, рассматривается аналогично). Положим

$$\frac{a_0^2}{2} = \delta^2, \quad a_{n_0} = \frac{1}{n_0^r}, \quad a_j = 0, \quad j \neq 0, n_0, \quad b_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (5.23), получаем

$$E_2(x(\cdot), W_2^T(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}}.$$

Будем искать оптимальные методы восстановления в виде

$$\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} \alpha_j \tilde{a}_j \cos jt + \sum_{j \in B} \beta_j \tilde{b}_j \sin jt,$$

где $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ — некоторые последовательности. Для оценки погрешности метода $\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (\cdot)$ надо оценить значение следующей экстремальной задачи

$$(5.24) \quad \begin{aligned} & \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} (a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in B} (b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} b_j^2 \rightarrow \max, \\ & \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} (a_j - \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} (b_j - \tilde{b}_j)^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1. \end{aligned}$$

Положим

$$u_j = a_j - \tilde{a}_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad v_j = b_j - \tilde{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда задача (5.24) переписется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} ((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} ((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} a_j^2 \\ & + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} b_j^2 \rightarrow \max, \quad \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1. \end{aligned}$$

Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} ((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 &= \left(\frac{n_0^r (1 - \alpha_j)}{j^r} \frac{j^r a_j}{n_0^r} + \alpha_j u_j \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \alpha_j)^2}{j^{2r}} + \alpha_j^2 \right) \left(\frac{j^{2r} a_j^2}{n_0^{2r}} + u_j^2 \right). \end{aligned}$$

Аналогично получаются неравенства

$$((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 \leq \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \beta_j)^2}{j^{2r}} + \beta_j^2 \right) \left(\frac{j^{2r} b_j^2}{n_0^{2r}} + v_j^2 \right).$$

Положим

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \max_{j \in \mathbb{N} \setminus A} \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \alpha_j)^2}{j^{2r}} + \alpha_j^2 \right), \quad S_\beta = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus B} \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \beta_j)^2}{j^{2r}} + \beta_j^2 \right), \\ S &= \max\{S_\alpha, S_\beta\}. \end{aligned}$$

Если α и β выбрать из условий (5.21), то $S \leq 1$. Поэтому для квадратов погрешностей методов (5.22) получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} \left(\frac{j^{2r} a_j^2}{n_0^{2r}} + u_j^2 \right) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} \left(\frac{j^{2r} b_j^2}{n_0^{2r}} + v_j^2 \right) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} b_j^2 \\ \leq \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 + \frac{1}{n_0^{2r}} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq \delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$e_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) \leq \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}} \leq E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta).$$

Отсюда следует равенство (5.20) и оптимальность методов (5.22). $\square$

Отметим, что среди оптимальных методов (5.22) есть методы вида

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{j=1}^{n_0-1} (\alpha_j \tilde{a}_j \cos jt + \beta_j \tilde{b}_j \sin jt).$$

Эти методы не используют информации о приближенных значениях коэффициентах Фурье из множеств $A \setminus \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, $B \setminus \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Тем самым эта информация является “лишней” в том смысле, что наличие ее не уменьшает погрешность оптимального восстановления.

Рассмотрим теперь задачу восстановления k -ой производной, $k > 0$, по той же информации. При $n_0 > 1$ положим

$$n_1 = \min \left\{ j : \frac{(j+1)^{2k} - j^{2k}}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} \leq \frac{1}{n_0^{2(r-k)}}, 1 \leq j \leq n_0 - 1 \right\}.$$

Определим λ_1 и λ_2 при $n_0 > 1$ и $\delta < 1$ равенствами

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{cases} \frac{(j+1)^{2r} j^{2k} - (j+1)^{2k} j^{2r}}{(j+1)^{2r} - j^{2r}}, & 1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r, \quad j = 1, \dots, n_1 - 1, \\ n_1^{2k} \left(1 - \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{2(r-k)} \right), & \delta < 1/n_1^r, \end{cases} \\ \lambda_2 &= \begin{cases} \frac{(j+1)^{2k} - j^{2k}}{(j+1)^{2r} - j^{2r}}, & 1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r, \quad j = 1, \dots, n_1 - 1, \\ \frac{1}{n_0^{2(r-k)}}, & \delta < 1/n_1^r. \end{cases} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.5. Если $n_0 = 1$ или $\delta \geq 1$, то

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = 1,$$

а метод $\varphi_0 \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) \equiv 0$ является оптимальным. Если $n_0 > 1$ и $\delta < 1$, то

$$(5.25) \quad E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2},$$

и для любых наборов чисел $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ таких, что

$$(5.26) \quad j^{2k} \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \quad j \in A \setminus \{0\}, \quad j^{2k} \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \quad j \in B,$$

методы

$$(5.27) \quad \varphi_{\alpha, \beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^k \alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) + \sum_{j \in B} j^k \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right)$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Экстремальная задача в правой части (5.18) (для удобства мы снова переходим к квадратам), используя равенство Парсеваля, будет иметь вид

$$(5.28) \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) \rightarrow \max, \quad \|F_{A,B} x(\cdot)\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Предположим, что $n_0 = 1$. Будем считать, что $1 \notin A$ (случай $1 \notin B$ рассматривается аналогично). Положим

$$a_1 = 1, \quad a_j = 0, \quad j \neq 1, \quad b_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (5.28), получаем

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq 1.$$

Если $\delta \geq 1$, то, положив $a_1 = 1, a_j = 0, j \neq 1, b_j = 0, j \in \mathbb{N}$, убеждаемся, что

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq 1.$$

Найдем погрешность метода $\varphi_0 \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) \equiv 0$. Имеем

$$\begin{aligned} e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_0) &= \sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \\ &= \sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2} \leq \sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

В силу полученных оценок снизу при $n_0 = 1$ или при $\delta \geq 1$ метод $\varphi_0 \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (\cdot)$ является оптимальным, а

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = 1.$$

Пусть $n_0 > 1$ и $\delta \leq 1$. При $\delta < 1/n_1^r$ рассмотрим последовательность

$$a_{n_1} = \delta, \quad a_{n_0} = \frac{\sqrt{1 - n_1^{2r} \delta^2}}{n_0^r}, \quad a_j = 0, \quad j \neq n_1, n_0, \quad b_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (5.28), получаем

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sqrt{n_1^{2k} \delta^2 + \frac{1 - n_1^{2r} \delta^2}{n_0^{2(r-k)}}} = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}.$$

Пусть теперь $1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r$ при некотором $j = 1, \dots, n_1 - 1$. Положим

$$a_j = \left(\frac{(j+1)^{2r} \delta^2 - 1}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} \right)^{1/2}, \quad a_{j+1} = \left(\frac{1 - j^{2r} \delta^2}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} \right)^{1/2},$$

$a_m = 0$, $m \neq j, j+1$, $b_m = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Нетрудно убедиться, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (5.28), поэтому

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sqrt{j^{2k} \frac{(j+1)^{2r} \delta^2 - 1}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} + (j+1)^{2k} \frac{1 - j^{2r} \delta^2}{(j+1)^{2r} - j^{2r}}} \\ = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}.$$

Будем искать оптимальные методы восстановления в виде

$$\varphi_{\alpha, \beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^k \alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) \\ + \sum_{j \in B} j^k \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right),$$

где $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ — некоторые последовательности. Для оценки погрешности метода $\varphi_{\alpha, \beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (\cdot)$ надо оценить значение следующей экстремальной задачи

$$(5.29) \quad \sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^{2k} (a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in B} j^{2k} (b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} b_j^2 \rightarrow \max, \\ \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} (a_j - \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} (b_j - \tilde{b}_j)^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Положим

$$u_j = a_j - \tilde{a}_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad v_j = b_j - \tilde{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда задача (5.24) переписывается в виде

$$\sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^{2k} ((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} ((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} a_j^2 \\ + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} b_j^2 \rightarrow \max, \quad \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 = \left(\frac{(1 - \alpha_j)}{\sqrt{\lambda_2} j^r} \sqrt{\lambda_2} j^r a_j + \frac{\alpha_j}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\lambda_1} u_j \right)^2 \\ \leq \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right) (\lambda_2 j^{2r} a_j^2 + \lambda_1 u_j^2).$$

Аналогично получаются неравенства

$$((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 \leq \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right) (\lambda_2 j^{2r} b_j^2 + \lambda_1 v_j^2).$$

Положим

$$S_\alpha = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right), \quad S_\beta = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right), \\ S = \max\{S_\alpha, S_\beta\}.$$

Если α и β выбрать из условий (5.26), то $S \leq 1$. Поэтому для квадратов погрешностей методов (5.27) с учетом того, что $j^{2k} \leq \lambda_2 j^{2r}$ при $j \geq n_0$, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in A \setminus \{0\}} (\lambda_2 j^{2r} a_j^2 + \lambda_1 u_j^2) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} (\lambda_2 j^{2r} b_j^2 + \lambda_1 v_j^2) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} b_j^2 \\ & \leq \lambda_1 \left(\sum_{j \in A \setminus \{0\}} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 \right) + \lambda_2 \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Тем самым

$$e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) \leq \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2} \leq E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta).$$

Отсюда следует равенство (5.25) и оптимальность методов (5.27).

Осталось показать, что существуют $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$, удовлетворяющие условиям (5.26). Рассмотрим на плоскости множество точек

$$\begin{cases} x_j = j^{2r}, \\ y_j = j^{2k}, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

Соединяя соседние точки отрезками прямой, получим вогнутую ломаную. Несложно убедиться, что при $1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r$, $j = 1, \dots, n_1 - 1$, прямая $y = \lambda_2 x + \lambda_1$ проходит через точки (x_j, y_j) , (x_{j+1}, y_{j+1}) . В силу вогнутости ломаной будем иметь

$$(5.30) \quad y_s \leq \lambda_2 x_s + \lambda_1, \quad s = 1, 2, \dots$$

При $\delta < 1/n_1^r$ прямая $y = \lambda_2 x + \lambda_1$ проходит через точку (n_1^{2k}, n_1^{2r}) , и в силу определения n_1 для нее снова справедливы неравенства (5.30).

Положим

$$\alpha_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}}, \quad j \in A \setminus \{0\}.$$

Тогда из (5.30) получаем

$$j^{2k} \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right) = \frac{j^{2k}}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}} \leq 1.$$

Положив

$$\beta_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}}, \quad j \in B,$$

аналогичным образом получаем

$$j^{2k} \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right) = \frac{j^{2k}}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}} \leq 1.$$

□

Пусть $n_0 > 1$ и $\delta \leq 1$. Положим

$$j_0 = \max \left\{ j : \frac{1}{j^{2(r-k)}} > \lambda_2 \right\}.$$

Так как $\lambda_2 \geq 1/n_0^2(r-k)$, то $j_0 < n_0$. Если $j \leq j_0$ и $j \in A$, то можно взять $\alpha_j = 0$, а если $j \leq j_0$ и $j \in B$, то $\beta_j = 0$ тоже удовлетворяет условиям (5.26).

Следовательно, среди оптимальных методов есть метод вида

$$\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \sum_{j=1}^{j_0} j^k \left(\alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) + \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) \right).$$

Тем самым при заданном $\delta < 1$ информация о приближенных коэффициентах Фурье с номерами большими, чем j_0 , является “лишней” в том смысле, что наличие ее не уменьшает погрешность оптимального восстановления.

5.5. Восстановление функции и ее производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в метрике l_∞^N

Рассмотрим ту же задачу оптимального восстановления, что и в предыдущем разделе, но теперь будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ нам известен вектор

$$y = (\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B})$$

такой, что

$$\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_\infty^N} \leq \delta.$$

Погрешностью метода восстановления $\varphi: l_\infty^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ в этом случае назовем величину

$$e_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), y \in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_\infty^N} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

а величину

$$E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi: l_\infty^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

будем называть *погрешностью оптимального восстановления*. Метод, на котором достигается нижняя грань, будем по-прежнему называть *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$\hat{p} = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^{2n} < 1 \right\}$$

и $p_0 = \min\{\hat{p}, n_0 - 1\}$, где n_0 определено равенством (5.19),

$$\chi_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5.6. Если $0 \notin A$, то

$$E_\infty(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty.$$

Если $1 \leq k \leq r-1$ или $k=0$ и $0 \in A$, то

$$\begin{aligned} & E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \\ &= \sqrt{\frac{1}{(p_0+1)^{2(r-k)}} + \frac{\delta^2}{2} \chi_k + 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} j^{2k} \left(1 - \left(\frac{j}{p_0+1} \right)^{2(r-k)} \right)} \end{aligned}$$

и метод

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B})(t) &= \frac{\tilde{a}_0}{2} \chi_k \\ &+ \sum_{j=1}^{p_0} \left(1 - \left(\frac{j}{p_0+1} \right)^{2(r-k)} \right) j^k (\tilde{a}_j \cos(jt + \pi k/2) + \tilde{b}_j \sin(jt + \pi k/2)) \end{aligned}$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 (аналогично неравенству (5.18)) получаем оценку снизу

$$(5.31) \quad E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}) \\ \|F_{A,B}x(\cdot)\|_{l_\infty^N} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Пусть $k = 0$. Если $0 \notin A$, то для любой функции $x(\cdot)$, являющейся константой, выполняются условия $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ и $\|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty \leq \delta$ ($F_{A,B}x(\cdot)$ — нулевой вектор) и тем самым правая часть в (5.31) может быть сделана сколь угодно большой, т. е. $E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty$.

Пусть теперь $1 \leq k \leq r-1$ или $k = 0$ и $0 \in A$. Рассмотрим экстремальную задачу в правой части (5.31) (для удобства мы переходим к квадратам). Используя равенство Парсеваля, имеем

$$(5.32) \quad \frac{a_0^2}{2} \chi_k + \sum_{j=1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1, \\ a_j^2 \leq \delta^2, \quad j \in A, \quad b_j^2 \leq \delta^2, \quad j \in B.$$

Пусть $p_0 = \widehat{p} < n_0 - 1$. Положим $\widehat{a}_j = \delta$, $j = 0, 1, \dots, p_0$, $\widehat{b}_j = \delta$, $j = 1, \dots, p_0$, $\widehat{a}_{p_0+1} = \widehat{b}_{p_0+1} = \alpha$, где

$$\alpha = \frac{\sqrt{1/2 - \delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2r}}}{(p_0+1)^r}$$

и $\widehat{a}_j = \widehat{b}_j = 0$, если $j > p_0 + 1$.

Проверим, что $\alpha \leq \delta$. Если это не так, то мы имели бы неравенство

$$1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2r} > 2\delta^2 (p_0+1)^{2r},$$

или

$$2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0+1} j^{2r} < 1$$

в противоречие с тем, что $p_0 = \widehat{p}$. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (\widehat{a}_j^2 + \widehat{b}_j^2) = 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} j^{2r} + \frac{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2r}}{(p_0+1)^{2r}} (p_0+1)^{2r} = 1,$$

и тем самым $(\{\hat{a}_j\}_{j \in A}, \{\hat{b}_j\}_{j \in B})$ — допустимая последовательность в задаче (5.32). Следовательно, из (5.31) вытекает, что

$$(5.33) \quad E_\infty^2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \frac{\hat{a}_0^2}{2} \chi_k + \sum_{j=1}^{\infty} j^{2k} (\hat{a}_j^2 + \hat{b}_j^2) \\ = \frac{\delta^2}{2} \chi_k + 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} j^{2k} + \frac{1 - 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} j^{2r}}{(p_0 + 1)^{2r}} (p_0 + 1)^{2k} = \hat{\lambda} + \delta^2 \left(\hat{\lambda}_0 + 2 \sum_{j=1}^{p_0} \hat{\lambda}_j \right),$$

где

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{(p_0 + 1)^{2(r-k)}}, \quad \hat{\lambda}_0 = \frac{1}{2} \chi_k, \quad \hat{\lambda}_j = j^{2k} \left(1 - \left(\frac{j}{p_0 + 1} \right)^{2(r-k)} \right), \quad j = 1, \dots, p_0.$$

Пусть теперь $p_0 = n_0 - 1$. Если $n_0 = \min_{n \in \mathbb{N} \setminus A} n$ ($n_0 = \min_{n \in \mathbb{N} \setminus B} n$), то полагаем $\hat{a}_j = \delta$, $j = 0, 1, \dots, p_0$, $\hat{b}_j = \delta$, $j = 1, \dots, p_0$, $\hat{a}_{p_0+1} = \sqrt{2}\alpha$ ($\hat{b}_{p_0+1} = \sqrt{2}\alpha$), а остальные коэффициенты нулевые. Последовательность $(\{\hat{a}_j\}_{j \in A}, \{\hat{b}_j\}_{j \in B})$ допустима в задаче (5.32). Проверка такая же, как в предыдущем случае, но в данной ситуации $p_0 + 1 = n_0 \notin A$ (B) и поэтому неравенство $|\sqrt{2}\alpha| \leq \delta$ не обязано выполняться. Тем самым из (5.31) вытекает то же неравенство (5.33).

Займемся теперь построением оптимального метода. Будем искать его среди методов вида

$$\varphi_{\alpha, \beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} \chi_k \\ + \sum_{j=1}^{p_0} j^{2k} \left(\alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) + \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) \right),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p_0})$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{p_0})$. Для оценки погрешности такого метода следует оценивать значение следующей экстремальной задачи

$$(5.34) \quad \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j=1}^{p_0} j^{2k} ((a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 + (b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2) + \sum_{j=p_0+1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) \rightarrow \max, \\ |a_0 - \tilde{a}_0| \chi_k \leq \delta, \quad |a_j - \tilde{a}_j| \leq \delta, \quad |b_j - \tilde{b}_j| \leq \delta, \quad j = 1, \dots, p_0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Оценим по неравенству Коши–Буняковского слагаемые под знаком первой суммы в максимизируемом функционале

$$(a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 = \left(\frac{1 - \alpha_j}{\sqrt{\hat{\lambda}_j} j^r} \sqrt{\hat{\lambda}_j} j^r a_j + \frac{\alpha_j}{\sqrt{\hat{\lambda}_j}} \sqrt{\hat{\lambda}_j} (a_j - \tilde{a}_j) \right)^2 \\ \leq \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\hat{\lambda}_j j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\hat{\lambda}_j} \right) (\hat{\lambda}_j j^{2r} a_j^2 + \hat{\lambda}_j (a_j - \tilde{a}_j)^2).$$

Аналогично получаем

$$(b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2 \leq \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\hat{\lambda}_j j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\hat{\lambda}_j} \right) (\hat{\lambda}_j j^{2r} b_j^2 + \hat{\lambda}_j (b_j - \tilde{b}_j)^2).$$

Складывая полученные оценки и обозначая

$$S_{\alpha,\beta} = \max_{1 \leq j \leq p_0} \left\{ j^{2k} \left(\frac{(1-\alpha_j)^2}{\widehat{\lambda} j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\widehat{\lambda}_j} \right), j^{2k} \left(\frac{(1-\beta_j)^2}{\widehat{\lambda} j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\widehat{\lambda}_j} \right) \right\},$$

получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{p_0} j^{2k} ((a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 + (b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2) \\ & \leq S_{\alpha,\beta} \left(\widehat{\lambda} \sum_{j=1}^{p_0} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) + \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j ((a_j - \tilde{a}_j)^2 + (b_j - \tilde{b}_j)^2) \right) \\ & \leq S_{\alpha,\beta} \left(\widehat{\lambda} \sum_{j=1}^{p_0} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) + 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j \right). \end{aligned}$$

Далее, если $j \geq p_0 + 1$, то $j^{-2(r-k)} \leq (p_0 + 1)^{-2(r-k)} = \widehat{\lambda}$ и поэтому

$$\sum_{j=p_0+1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) = \sum_{j=p_0+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2(r-k)}} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq \widehat{\lambda} \sum_{j=p_0+1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2).$$

Если наборы α и β таковы, что $S_{\alpha,\beta} \leq 1$, то из полученных оценок вытекает, что максимизируемый функционал в (5.34) не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2}{2} \chi_k + \widehat{\lambda} \sum_{j=1}^{p_0} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) + 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda} \sum_{j=p_0+1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \\ & = \frac{\delta^2}{2} \chi_k + \widehat{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) + 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j \leq \frac{\delta^2}{2} \chi_k + \widehat{\lambda} + 2\delta^2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j \\ & = \widehat{\lambda} + \delta^2 \left(\widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$e(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) \leq \sqrt{\widehat{\lambda} + \delta^2 \left(\widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j \right)}.$$

Вместе с оценкой (5.33) это означает, что метод $\varphi_{\alpha,\beta}$ оптимален, а

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda} + \delta^2 \left(\widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j \right)}.$$

Покажем, что векторы α и β , для которых $S_{\alpha,\beta} \leq 1$, существуют. Положим

$$(5.35) \quad \alpha_j = \beta_j = \frac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda} j^{2r}}, \quad j = 1, \dots, p_0.$$

Тогда для таких α и β

$$S_{\alpha,\beta} = \max_{1 \leq j \leq p_0} \frac{j^{2k}}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda} j^{2r}} = 1.$$

□

Отметим, что коэффициенты Фурье с номерами, большими p_0 можно отбросить — оптимальный метод их не использует.

5.6. Восстановление функции и ее производных по неточно заданному преобразованию Фурье

Рассмотрим аналоги задач, рассмотренных выше, для функций, определенных на всей прямой. Здесь в качестве используемой информации выступает неточно заданное преобразование Фурье. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$. Через $\mathcal{W}_{F,p,2}^r(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $x^{(r-1)}(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна, $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, а $Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R})$ ($Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$). Положим

$$W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_{F,p,2}^r(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1\}.$$

Предположим, что известно преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ функции $x(\cdot) \in W_{F,p,2}^r(\mathbb{R})$, заданное на $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, с точностью до δ в метрике $L_p(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Требуется по этой информации восстановить функцию $x^{(k)}(\cdot)$, $0 \leq k < r$, в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Всякий метод восстановления представляет из себя отображение $\varphi: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

Погрешностью метода восстановления $\varphi: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ назовем величину

$$e(x^{(k)}(\cdot), W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}), y \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

а величину

$$(5.36) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \inf_{\varphi: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(x^{(k)}(\cdot), W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \varphi).$$

будем называть *погрешностью оптимального восстановления*. Метод, на котором достигается нижняя грань, будем, как обычно, называть *оптимальным методом восстановления*. Случай, когда $2 \leq p \leq \infty$ и $\sigma = \infty$ был рассмотрен ранее (см. следствие 3.18 и теорему 3.19). Здесь будет рассмотрен случай, когда $\sigma < \infty$, а $p = \infty, 2$.

Из леммы 2.1 получаем оценку снизу

$$(5.37) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{F,p,2}^r(\mathbb{R}) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Пусть $p = \infty$. Положим

$$\hat{\sigma} = \left((2r+1) \frac{\pi}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2r+1}}.$$

ТЕОРЕМА 5.7. При всех $\sigma > 0$ и $\delta > 0$

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,\infty,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\sigma^{-2(r-k)} + \frac{2\delta^2(r-k)}{\pi(2k+1)(2r+1)} \sigma^{2k+1}}, & \sigma < \hat{\sigma}, \\ \sqrt{\frac{2r+1}{2k+1}} \left(\frac{\delta^2}{\pi(2r+1)} \right)^{\frac{r-k}{2r+1}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}, \end{cases}$$

а метод

$$(5.38) \quad \hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (i\xi)^k \left(1 - \left(\frac{\xi}{\sigma_0} \right)^{2(r-k)} \right) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi,$$

где $\sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\}$, является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\sigma \geq \hat{\sigma}$. Рассмотрим функцию $\hat{x}(\cdot)$ такую, что ее преобразование Фурье совпадает с δ на интервале $(-\sigma_0, \sigma_0)$, а вне этого интервала равно нулю. Тогда легко убедиться, что $\hat{x}(\cdot)$ — допустимая функция в экстремальной задаче в правой части (5.37) при $p = \infty$. Следовательно,

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,\infty,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} \xi^{2k} d\xi \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2r+1}{2k+1}} \left(\frac{\delta^2}{\pi(2r+1)} \right)^{\frac{r-k}{2r+1}}. \quad (5.39)$$

Пусть теперь $\sigma < \hat{\sigma}$. Тогда

$$\gamma = 1 - \frac{\delta^2 \sigma^{2r+1}}{\pi(2r+1)} > 0.$$

Для $n > \gamma^{-2}$ рассмотрим последовательность

$$u_n(\xi) = \begin{cases} \delta, & |\xi| \leq \sigma, \\ \sigma^{-r} \sqrt{\pi(n\gamma - \sqrt{n})}, & \sigma < |\xi| < \sigma + 1/n, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma + 1/n. \end{cases}$$

Через $\hat{x}_n(\cdot)$ обозначим функцию, преобразование Фурье которой совпадает с $u_n(\cdot)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |u_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2r} d\xi + \frac{n\gamma - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \int_{\sigma}^{\sigma+1/n} \xi^{2r} d\xi \\ &= 1 - \gamma + (n\gamma - \sqrt{n}) \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{\sigma^{2r}(2r+1)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся представлением

$$(5.40) \quad \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{\sigma^{2r}(2r+1)} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \right),$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|\hat{x}_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = 1 - \gamma + \left(\gamma - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \alpha_n \left(\gamma - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Так как $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то при достаточно больших n

$$1 - \alpha_n \left(\gamma - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \frac{1}{2}.$$

Тем самым для достаточно больших n

$$\|\hat{x}_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} < 1,$$

а соответствующие функции $\hat{x}_n(\cdot)$ являются допустимыми в экстремальной задаче в правой части (5.37) при $p = \infty$. Отсюда

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F,\infty,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \|\hat{x}_n^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |u_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2k} d\xi + \frac{n\gamma - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \int_{\sigma}^{\sigma+1/n} \xi^{2k} d\xi \\ &= \frac{\delta^2 \sigma^{2k+1}}{\pi(2k+1)} + (n\gamma - \sqrt{n}) \frac{(\sigma + 1/n)^{2k+1} - \sigma^{2k+1}}{\sigma^{2r}(2k+1)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$(5.41) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{F, \infty, 2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sqrt{\sigma^{-2(r-k)} + \frac{2\delta^2(r-k)}{\pi(2k+1)(2r+1)}} \sigma^{2k+1}.$$

Для оценки погрешности метода (5.38) рассмотрим экстремальную задачу

$$\|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{\varphi}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)} \leq \delta, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Переходя к образам Фурье, для оценки квадрата погрешности метода (5.38) получаем следующую задачу

$$(5.42) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$|Fx(\xi) - y(\xi)| \leq \delta, \quad |\xi| \leq \sigma, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1,$$

где

$$a(\xi) = 1 - \lambda \xi^{2(r-k)}, \quad \lambda = \sigma_0^{-2(r-k)}.$$

Положим

$$\lambda_1(\xi) = \begin{cases} \xi^{2k}(1 - \lambda \xi^{2(r-k)}), & |\xi| \leq \sigma_0, \\ 0, & |\xi| > \sigma_0. \end{cases}$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 &= \xi^{2k} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ &\leq \xi^{2k} \left(\frac{(1 - a(\xi))^2}{\lambda \xi^{2r}} + \frac{a^2(\xi)}{\lambda_1(\xi)} \right) (\lambda \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_1(\xi) |Fx(\xi) - y(\xi)|^2) \\ &= (\lambda \xi^{2(r-k)} + a(\xi)) (\lambda \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_1(\xi) |Fx(\xi) - y(\xi)|^2) \\ &= \lambda \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \lambda_1(\xi) |Fx(\xi) - y(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для допустимых функций в задаче (5.42) максимизируемый функционал оценивается величиной

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \lambda_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \lambda_1(\xi) d\xi + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \lambda_1(\xi) d\xi \leq \lambda + \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \lambda_1(\xi) d\xi \\ &= \sigma_0^{-2(r-k)} + \frac{\delta^2}{\pi} \sigma_0^{2k+1} \frac{2(r-k)}{(2k+1)(2r+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e(x^{(k)}(\cdot), W_{F, \infty, 2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \widehat{\varphi}) &\leq \sqrt{\sigma_0^{-2(r-k)} + \frac{\delta^2}{\pi} \sigma_0^{2k+1} \frac{2(r-k)}{(2k+1)(2r+1)}} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\sigma^{-2(r-k)} + \frac{2\delta^2(r-k)}{\pi(2k+1)(2r+1)}} \sigma^{2k+1}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \sqrt{\frac{2r+1}{2k+1}} \left(\frac{\delta^2}{\pi(2r+1)} \right)^{\frac{r-k}{2r+1}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу оценок (5.39) и (5.41) отсюда вытекает оптимальность метода (5.38), а также соответствующее равенство для погрешности оптимального восстановления. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $p = 2$.

В образах Фурье, экстремальная задача в правой части (5.37) при $p = 2$ записывается в виде (как обычно, переходим к квадратам)

$$(5.43) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Пусть сначала $k = 0$.

ТЕОРЕМА 5.8. При всех $\sigma > 0$ и $\delta > 0$

$$(5.44) \quad E(x(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}}.$$

Для всех функций $a(\cdot)$ таких, что

$$(5.45) \quad \left| a(\xi) - \frac{\sigma^{2r}}{\sigma^{2r} + \xi^{2r}} \right| \leq \frac{\xi^{2r}}{\sigma^{2r} + \xi^{2r}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\widehat{x}_n(\cdot)$ обозначим функцию, для которой

$$F\widehat{x}_n(\xi) = \begin{cases} \delta\sqrt{n}, & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{n}, \\ \sigma^{-r} \sqrt{2\pi(n - \sqrt{n})}, & \sigma < \xi < \sigma + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для $n > \sigma^{-1}$ имеем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2 n}{2\pi} \int_0^{1/n} \xi^{2r} d\xi + \frac{n - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \int_{\sigma}^{\sigma+1/n} \xi^{2r} d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi n^{2r}(2r+1)} + (n - \sqrt{n}) \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{\sigma^{2r}(2r+1)}. \end{aligned}$$

Используя представление (5.40), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{2\pi n^{2r}(2r+1)} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_n,$$

где

$$\beta_n = 1 - \alpha_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\delta^2}{2\pi n^{2r-1/2}(2r+1)}.$$

В силу того, что $\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, при достаточно больших n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} < 1.$$

Следовательно, для достаточно больших n функции $F\widehat{x}_n(\cdot)$ допустимы в экстремальной задаче (5.43) для $k = 0$. Тем самым

$$E^2(x(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{2\pi} + \sigma^{-2r} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$E(x(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}}.$$

Будем искать оптимальные методы среди таких, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F\widehat{\varphi}(y)(\xi) = \begin{cases} a(\xi)y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

где $a(\cdot)$ — некоторая ограниченная функция. В образах Фурье для оценки квадрата погрешности таких методов получаем следующую задачу

$$(5.46) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши–Буняковского

$$|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 = |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ \leq \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\sigma^{-2r}\xi^{2r}} + |a(\xi)|^2 \right) (\sigma^{-2r}\xi^{2r}|Fx(\xi)|^2 + |Fx(\xi) - y(\xi)|^2).$$

Предположим, что функция $a(\cdot)$ выбрана так, что

$$(5.47) \quad \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\sigma^{-2r}\xi^{2r}} + |a(\xi)|^2 \leq 1.$$

Тогда

$$|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 \leq \sigma^{-2r}\xi^{2r}|Fx(\xi)|^2 + |Fx(\xi) - y(\xi)|^2.$$

Поэтому для максимизируемого функционала в (5.46) имеем оценку

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ \leq \sigma^{-2r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ \leq \sigma^{-2r} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\delta^2}{2\pi} \leq \sigma^{-2r} + \frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Отсюда следует, что

$$e(x(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}} \leq E(x(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta).$$

Тем самым $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$ — оптимальный метод восстановления, а для его погрешности справедливо равенство (5.44).

Остается убедиться, что условие (5.47) эквивалентно условию (5.45), что легко сделать, выделив полный квадрат в неравенстве (5.47). $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $k \geq 1$. Положим

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Введем также следующие обозначения: $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$,

$$\widehat{\lambda}_1 = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{r} \sigma_0^{2k}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \sigma_0^{-2(r-k)}.$$

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть $1 \leq k \leq r-1$, $\sigma > 0$ и $\delta > 0$. Тогда

$$(5.48) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\frac{r-k}{2\pi r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{r-k}{2r}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Для всех измеримых на $[-\sigma, \sigma]$ функций $\theta(\cdot)$ таких, что $|\theta(\xi)| \leq 1$ при $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, и всех

$$(5.49) \quad a(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta(\xi)|\xi|^{r-k} \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 (\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k})}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}}$$

методы

$$(5.50) \quad \widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (i\xi)^k a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\widehat{\xi} = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \sigma_0.$$

Предположим сначала, что $\sigma < \widehat{\sigma}$ (в этом случае $\sigma_0 = \sigma$). Рассмотрим для достаточно больших n последовательность функций $\widehat{x}_n(\cdot)$ такую, что

$$F\widehat{x}_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{n} \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \widehat{\xi} \leq |\xi| \leq \widehat{\xi} + 1/n, \\ \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{n - \sqrt{n}}}{\sigma^r} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \widehat{\xi}^{2r}\right)^{1/2}, & \sigma \leq |\xi| \leq \sigma + 1/n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \delta^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{n\delta^2}{2\pi} \frac{(\widehat{\xi} + 1/n)^{2r+1} - \widehat{\xi}^{2r+1}}{2r+1} \\ &\quad + \frac{n - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \widehat{\xi}^{2r}\right) \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{2r+1}. \end{aligned}$$

Используя представление (5.40) и аналогичное ему

$$\frac{(\widehat{\xi} + 1/n)^{2r+1} - \widehat{\xi}^{2r+1}}{2r+1} = \frac{1}{n} \widehat{\xi}^{2r} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right) \\ &+ \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r} + \varepsilon_n\right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым для достаточно больших n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) < 1.$$

Следовательно, для достаточно больших n функции $F\hat{x}_n(\cdot)$ допустимы в экстремальной задаче (5.43). Тем самым

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{n\delta^2}{2\pi} \frac{(\hat{\xi} + 1/n)^{2k+1} - \hat{\xi}^{2k+1}}{2k+1} + \frac{n - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) \frac{(\sigma + 1/n)^{2k+1} - \sigma^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2k} + \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) \frac{\sigma^{2k}}{\sigma^{2r}}} \\ &= \sigma^k \sqrt{\frac{r-k}{2\pi r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma^{2r}}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\sigma \geq \hat{\sigma}$. В этом случае рассмотрим для достаточно больших n последовательность функций $\hat{x}_n(\cdot)$ такую, что

$$F\hat{x}_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{n - \sqrt{n}} \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \hat{\xi} \leq |\xi| \leq \hat{\xi} + 1/n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \delta^2 < \delta^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{(n - \sqrt{n})\delta^2}{2\pi} \frac{(\hat{\xi} + 1/n)^{2r+1} - \hat{\xi}^{2r+1}}{2r+1} \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \hat{\xi}^{2r} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \gamma_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при достаточно больших n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} < 1.$$

Следовательно, для достаточно больших n функции $F\hat{x}_n(\cdot)$ допустимы в экстремальной задаче (5.43). Тем самым

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{(n - \sqrt{n})\delta^2}{2\pi} \frac{(\hat{\xi} + 1/n)^{2k+1} - \hat{\xi}^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \hat{\xi}^k = \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{r-k}{2r}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi}} \delta^2 + \hat{\lambda}_2.$$

Будем искать оптимальные методы среди таких, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F\hat{\varphi}(y)(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k a(\xi) y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

где $a(\cdot)$ — некоторая ограниченная функция. В образах Фурье для оценки квадрата погрешности таких методов получаем следующую задачу

$$\begin{aligned} (5.51) \quad &\frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ &\int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} (5.52) \quad &\xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 = \xi^{2k} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ &\leq \xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_1} \right) (\hat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \hat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2). \end{aligned}$$

Предположим, что функция

$$(5.53) \quad S(\xi) = \xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_1} \right)$$

такова, что $S(\xi) \leq 1$. Тогда

$$\xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 \leq \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \hat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2.$$

Поэтому для максимизируемого функционала в (5.51) имеем оценку

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \hat{\lambda}_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \hat{\lambda}_2 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 \leq \frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$e(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \hat{\varphi}) \leq \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi}} \delta^2 + \hat{\lambda}_2 \leq E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta).$$

Тем самым $\hat{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)$ — оптимальный метод восстановления, а для его погрешности справедливо равенство (5.48).

Остается исследовать условия на функции $a(\cdot)$, при которых $S(\xi) \leq 1$. Выделяя полный квадрат, нетрудно показать, что неравенство

$$\xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1} \right) \leq 1$$

эквивалентно неравенству

$$(5.54) \quad \left| a(\xi) - \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} \right|^2 \leq \frac{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \xi^{2(r-k)}}{(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r})^2} (\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k}).$$

Покажем, что при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k} \geq 0.$$

Действительно, минимальные значения этой функции принимаются в точках

$$|\xi| = \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{1}{2(r-k)}}.$$

Они равны величине

$$\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{r}{r-k}} - \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{k}{r-k}} = \widehat{\lambda}_1 - \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{k} = 0.$$

Таким образом, множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (5.54) имеет вид (5.49). $\square$

5.7. Оптимальное восстановление и точность на подпространствах

В предыдущем разделе для задачи (5.36) при $p = 2$ было найдено целое семейство оптимальных методов. Оказывается, что некоторые методы из этого семейства имеют ряд преимуществ по сравнению с остальными. Будем сначала считать, что $1 \leq k \leq r - 1$. Рассмотрим условие

$$\xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1} \right) \leq 1,$$

которое гарантирует оптимальность метода (5.50). Если

$$|\xi| \geq \widehat{\lambda}_2^{-\frac{1}{2(r-k)}} = \sigma_0,$$

то $a(\xi)$ можно положить равным нулю. Тем самым оптимальные методы

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (i\xi)^k a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

не используют информацию о приближенном преобразовании Фурье на множестве $\sigma_0 \leq |\xi| \leq \sigma$.

Положим

$$\sigma' = \left(\frac{r-k}{r} \right)^{\frac{1}{2k}} \left(\frac{k}{r} \right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \sigma_0.$$

Если

$$|\xi| \leq \widehat{\lambda}_1^{\frac{1}{2k}} = \sigma',$$

то $a(\xi)$ можно положить равным единице. Рассмотрим методы

$$(5.55) \quad \widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma'}^{\sigma'} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0} (i\xi)^k a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Умножение на $a(\cdot)$ приближенного преобразования Фурье, задаваемого функцией $y(\cdot)$ называется *сглаживанием* или *фильтрацией* исходной информации. Методы (5.55) устроены следующим образом: при $|\xi| \leq \sigma'$ исходная информация не фильтруется, при $\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0$ происходит фильтрация, а при $|\xi| \geq \sigma_0$

информация отбрасывается. Далее мы покажем, чем хорошо отсутствие фильтрации на множестве $|\xi| \leq \sigma'$.

Одна из распространенных идей при построении численных методов состоит в том, что ищутся методы, точные на некотором подпространстве функций. При этом исходят из естественных соображений, основанных на том, что если исходная функция приближается с достаточной точностью элементами этого подпространства, то и соответствующий метод (как правило, являющийся некоторым линейным функционалом или оператором от этой функции) будет иметь приемлемую погрешность. Характерным примером здесь являются квадратурные формулы, построенные из условия их точности на алгебраических многочленах фиксированной степени, а наиболее ярким примером являются квадратурные формулы Гаусса.

Другой подход к построению численных методов, а в более широком смысле, к аппроксимации в целом, связан с идеями А. Н. Колмогорова. В этом случае вначале фиксируется некоторая априорная информация о функциях — некоторое множество функций (класс), для которых строится оптимальный (наилучший) метод из условия его минимальной погрешности на этом классе функций. Здесь также одним из характерных примеров являются квадратурные формулы, впервые построенные в такой постановке С. М. Никольским.

Здесь мы попытаемся совместить эти два подхода: один, идущий от Гаусса и основанный на построении методов, точных на подпространствах, и другой, идущий от А. Н. Колмогорова, который основан на построении методов, оптимальных на данном классе. Иначе говоря, будем искать методы, которые были бы оптимальны на классе и в то же время точны на некотором фиксированном подпространстве.

Сначала сформулируем расширенный вариант задачи (5.36) при $p = 2$. Пусть W — некоторое подмножество (класс) функций из $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$. По аналогии с задачей (5.36) положим при $0 \leq k \leq r - 1$

$$(5.56) \quad \begin{aligned} e(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta, \varphi) &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W, y \in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}, \\ E(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta) &= \inf_{\varphi: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Будем говорить, что метод $\varphi(y)(\cdot)$ *точен* на множестве $L \subset \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$, если $\varphi(Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma})(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$ для всех $x(\cdot) \in L$. Следующее предложение показывает, что оптимальность и точность метода не независимые понятия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.10. *Если $\hat{\varphi}$ — оптимальный линейный метод в задаче (5.56), точный на множестве $L \subset \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$, содержащем ноль, то он оптимален и на классе $W + L$. При этом*

$$(5.57) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta) = E(x^{(k)}(\cdot), W + L, \sigma, \delta).$$

Если $\hat{\varphi}$ — линейный метод с конечной погрешностью на классе $W + L$, где L — подпространство $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$, то он точен на L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(\cdot) \in W + L$, $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$, где $x_1(\cdot) \in W$, $x_2(\cdot) \in L$ и пусть $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такое, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Положим $y_1(\cdot) = y(\cdot) - Fx_2(\cdot)$. Ясно, что $y_1(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ и так как $Fx_1(\cdot) - y_1(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$, то

$$(5.58) \quad \|Fx_1(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta.$$

Из линейности и точности $\hat{\varphi}$ на L следует равенство

$$(5.59) \quad \|x^{(k)}(\cdot) - \hat{\varphi}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|x_1^{(k)}(\cdot) - \hat{\varphi}(y_1)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Выражение справа в (5.59) в силу (5.58) не превосходит величины $e(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta, \hat{\varphi})$, которая равна $E(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta)$, так как метод $\hat{\varphi}$ оптимален. Учитывая это обстоятельство и переходя в левой части (5.59) к верхней грани по всем указанным $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, получаем, что

$$e(x^{(k)}(\cdot), W + L, \sigma, \delta, \hat{\varphi}) \leq E(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta).$$

Отсюда и из того, что $W \subset W + L$ имеем

$$\begin{aligned} E(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta) &\leq E(x^{(k)}(\cdot), W + L, \sigma, \delta) \\ &\leq e(x^{(k)}(\cdot), W + L, \sigma, \delta, \hat{\varphi}) \leq E(x^{(k)}(\cdot), W, \sigma, \delta). \end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод для класса $W + L$ и справедливо равенство (5.57).

Пусть теперь $\hat{\varphi}$ — линейный метод с конечной погрешностью для класса $W + L$, где L — подпространство $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$. Предположим, что существует элемент $x_0(\cdot) \in L$, для которого

$$\|x_0^{(k)}(\cdot) - \hat{\varphi}(Fx_0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = c > 0.$$

Тогда $\lambda x_0(\cdot) \in L$ для любого $\lambda > 0$. Тем самым

$$e(x^{(k)}(\cdot), W + L, \sigma, \delta, \hat{\varphi}) \geq \lambda c,$$

что противоречит конечности погрешности метода $\hat{\varphi}$. $\square$

Из этого предложения вытекает, что если искать просто устроенные методы (например, линейные), точные на некоторых подпространствах и обладающие к тому же некоторыми свойствами оптимальности, то вполне естественно ставить задачу о нахождении оптимальных методов на классах вида $W + L$.

Будем искать оптимальные методы на классе $W + L$ для случая, когда $W = \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$, а $L = \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ — пространство целых функций экспоненциального типа σ . Напомним, что если $\sigma > 0$, то $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ — подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, образованное сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ . Как хорошо известно, $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда носитель $Fx(\cdot)$ принадлежит отрезку $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$. По определению, $\mathcal{B}_{0,2}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Очевидно, что $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$.

При $1 \leq k \leq r-1$ метод (5.55) является оптимальным на классе $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$ и точным на подпространстве $\mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ для любого $\sigma_1 \leq \sigma'$. Из предложения 5.10 вытекает, что этот метод является также оптимальным на классе $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ и

$$E(x^{(k)}(\cdot), \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = E(x^{(k)}(\cdot), \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta)$$

для любого $\sigma_1 \leq \sigma'$. Таким образом, при $1 \leq k \leq r-1$ задача нахождения оптимального метода и его погрешности в области

$$\Sigma = \{(\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}_+^2 : \sigma_1 \leq \sigma', \sigma > 0\}$$

решена.

При $k = 0$ из теоремы 5.8 следует, что метод

$$\hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

является оптимальным на классе $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$. Кроме того, он, очевидно, точен на подпространстве $\mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ для любого $\sigma_1 \leq \sigma$. Из предложения 5.10 вытекает, что этот метод является также оптимальным на классе $\mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ и

$$E(x(\cdot), \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = E(x(\cdot), \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta)$$

для любого $\sigma_1 \leq \sigma$. Тем самым при $k = 0$ задача нахождения оптимального метода и его погрешности в области $\sigma_1 \leq \sigma$ тоже решена.

Найдем решение этой задачи для остальных $(\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}_+^2$ и $\sigma > 0$. Положим

$$\Sigma_0 = \{ (\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_1 > \sigma > 0 \}.$$

При $1 \leq k \leq r-1$ положим

$$\hat{\sigma}_1 = \left(\frac{r-k}{r} \right)^{\frac{1}{2k}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2r}}$$

и рассмотрим области (см. рис. 5.7.1)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{\hat{\sigma}_1}{\sigma} \sigma \leq \sigma_1 \leq \sigma \right\}, \\ \Sigma_2 &= \left\{ (\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \sigma_1 \leq \frac{\hat{\sigma}_1}{\sigma} \sigma, 0 < \sigma \leq \hat{\sigma} \right\}, \\ \Sigma_3 &= \left\{ (\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2 : \sigma \geq \hat{\sigma}, 0 \leq \sigma_1 \leq \hat{\sigma}_1 \right\}, \\ \Sigma_4 &= \left\{ (\sigma, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2 : \hat{\sigma}_1 \leq \sigma_1 \leq \frac{\hat{\sigma}_1}{\sigma} \sigma \right\}. \end{aligned}$$

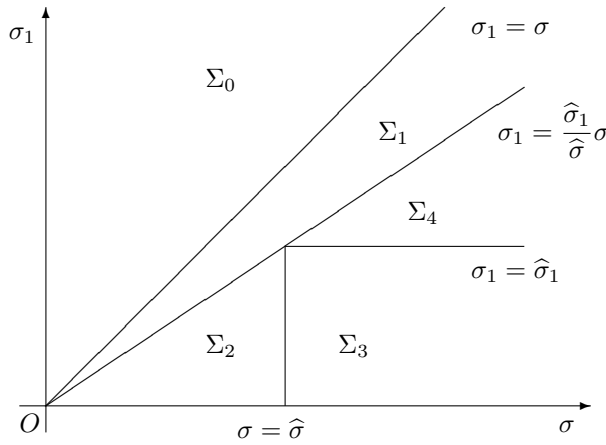


Рис. 5.7.1

Так как

$$\sigma' = \frac{\hat{\sigma}_1}{\sigma} \sigma_0,$$

то

$$\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3.$$

Тем самым при $1 \leq k \leq r-1$ следует рассмотреть области Σ_0 , Σ_1 и Σ_4 , а при $k = 0$ лишь область Σ_0 .

Положим при $1 \leq k \leq r-1$

$$\hat{\lambda}_1 = \sigma_1^{2k}, \quad \hat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sigma^{-2(r-k)}, & (\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_1, \\ \left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_1} \sigma_1 \right)^{-2(r-k)}, & (\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_4. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5.11. Пусть $\sigma > 0$ и $\delta > 0$.

1) Если $0 \leq k \leq r-1$ и $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_0$, то

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = +\infty$$

2) Если $1 \leq k \leq r-1$ и $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_1 \cup \Sigma_4$, то

$$(5.60) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2}.$$

Для всех измеримых на $[-\sigma, -\sigma'] \cup [\sigma', \sigma]$ функций $\theta(\cdot)$ таких, что $|\theta(\xi)| \leq 1$ при $\xi \in [-\sigma, -\sigma'] \cup [\sigma', \sigma]$, и всех

$$(5.61) \quad a(\xi) = \frac{\hat{\lambda}_1 + \theta(\xi)|\xi|^{r-k} \sqrt{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k})}}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}}$$

методы

$$\hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma'}^{\sigma'} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma' < |\xi| < \sigma} (i\xi)^k a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. Функция $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$ принадлежит $W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$(5.62) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} |\xi|^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x(\cdot) \in W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$, то $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$, где $x_1(\cdot) \in W_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$ и $x_2(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$. По теореме Планшереля (учитывая, что $Fx_2(\cdot)$ сосредоточено на отрезке Δ_{σ_1}) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} |\xi|^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} |\xi|^{2r} |Fx_1(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx_1(\xi)|^2 d\xi = \|x_1^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Обратно, пусть $x(\cdot) \in W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ и выполнено неравенство (5.62). Обозначим через $x_2(\cdot)$ функцию из $L_2(\mathbb{R})$ такую, что $Fx_2(\cdot) = \chi_{\sigma_1}(\cdot) Fx(\cdot)$, где $\chi_{\sigma_1}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка Δ_{σ_1} . Тогда ясно, что $x_2(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$. Положим $x_1(\cdot) = x(\cdot) - x_2(\cdot)$. Очевидно, что $x_1(\cdot) \in \mathcal{W}_{F,2,2}^r(\mathbb{R})$ и по теореме Планшереля (учитывая, что $Fx_1(\cdot) = 0$ на Δ_{σ_1}) будем иметь

$$\|x_1^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} \xi^{2r} |Fx_1(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1,$$

т. е. $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \in W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.11. Из леммы 2.1 получаем оценку снизу, аналогичную (5.37)

$$(5.63) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

1. Пусть $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_0$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(\cdot)$ такую, что

$$Fx_n(\xi) = \begin{cases} n, & \xi \in (\sigma, \sigma_1), \\ 0, & \xi \notin (\sigma, \sigma_1). \end{cases}$$

Очевидно, что $x_n(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma_1, 2}(\mathbb{R})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу (5.63)

$$E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F, 2, 2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1, 2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \|x_n^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_1} \xi^{2k} n^2 d\xi.$$

При $n \rightarrow +\infty$ правая часть в полученном выражении стремится к бесконечности. Следовательно, в области Σ_0

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{F, 2, 2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1, 2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = +\infty.$$

2. Пусть теперь $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_1$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(\cdot)$ такую, что

$$Fx_n(\xi) = \begin{cases} \delta\sqrt{n}, & \xi \in (\sigma_1 - 1/n, \sigma_1), \\ \sqrt{2\pi n}(\sigma + 1/n)^{-r}, & \xi \in (\sigma, \sigma + 1/n), \\ 0, & \text{в ост. случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\|Fx_n(\cdot)\|_{L_2(\Delta_{\sigma})}^2 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_1 + 1/n} \delta^2 n d\xi = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\|x_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma + 1/n} \xi^{2r} \frac{2\pi n}{(\sigma + 1/n)^{2r}} d\xi \leq 1.$$

Из (5.63) вытекает, что

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F, 2, 2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1, 2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \|x_n^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1 - 1/n}^{\sigma_1} \xi^{2k} \delta^2 n d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma + 1/n} \xi^{2k} \frac{2\pi n}{(\sigma + 1/n)^{2r}} d\xi \geq \left(\sigma_1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} \frac{\delta^2}{2\pi} + \sigma^{2k} \left(\sigma + \frac{1}{n}\right)^{-2r}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем

$$(5.64) \quad E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F, 2, 2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1, 2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sigma_1^{2k} \frac{\delta^2}{2\pi} + \sigma^{-2(r-k)}.$$

Рассмотрим случай, когда $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_4$. Положим

$$\hat{\xi}_1 = \left(\frac{r-k}{r}\right)^{-\frac{1}{2k}} \sigma_1.$$

Очевидно, что $\hat{\xi}_1 > \sigma_1$. Кроме того,

$$\hat{\xi}_1 \leq \left(\frac{r-k}{r}\right)^{-\frac{1}{2k}} \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}} \sigma = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \sigma < \sigma.$$

Отметим также, что

$$\hat{\xi}_1^{-2r} \leq \left(\frac{r-k}{r}\right)^{\frac{r}{k}} \hat{\sigma}_1^{-2r} = \frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Пусть n таково, что $1/n < \sigma_1 < \widehat{\xi}_1 - 1/n$. Для каждого такого n рассмотрим функцию $x_n(\cdot)$, для которой

$$Fx_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{n(\delta^2 - 2\pi\widehat{\xi}_1^{-2r})}, & \sigma_1 - 1/n \leq \xi < \sigma_1, \\ \widehat{\xi}_1^{-r}\sqrt{2\pi n}, & \widehat{\xi}_1 - 1/n \leq \xi \leq \widehat{\xi}_1, \\ 0, & \text{в ост. случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\|Fx_n(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 = \int_{\sigma_1-1/n}^{\sigma_1} n(\delta^2 - 2\pi\widehat{\xi}_1^{-2r}) d\xi + \int_{\widehat{\xi}_1-1/n}^{\widehat{\xi}_1} \widehat{\xi}_1^{-2r} 2\pi n d\xi = \delta^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma_1} |\xi|^{2r} |Fx_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\xi}_1-1/n}^{\widehat{\xi}_1} |\xi|^{2r} \widehat{\xi}_1^{-2r} 2\pi n d\xi \leq 1.$$

Из (5.63) вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \|x_n^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1-1/n}^{\sigma_1} \xi^{2k} n(\delta^2 - 2\pi\widehat{\xi}_1^{-2r}) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\xi}_1-1/n}^{\widehat{\xi}_1} \xi^{2k} \widehat{\xi}_1^{-2r} 2\pi n d\xi \\ &\geq \left(\sigma_1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} \left(\frac{\delta^2}{2\pi} - \widehat{\xi}_1^{-2r}\right) + \left(\widehat{\xi}_1 - 1/n\right)^{2k} \widehat{\xi}_1^{-2r}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем

(5.65)

$$E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \widehat{\xi}_1^{-2r} (\widehat{\xi}_1^{2k} - \sigma_1^{2k}) = \sigma_1^{2k} \frac{\delta^2}{2\pi} + \left(\frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\sigma}_1} \sigma_1\right)^{-2(r-k)}.$$

Итак, из неравенств (5.64) и (5.65) вытекает, что для всех $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_4$ справедливо неравенство

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \widehat{\lambda}_2}.$$

Займемся оценкой сверху. Будем искать оптимальные методы среди таких, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F\widehat{\varphi}(y)(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| \leq \sigma_1, \\ (i\xi)^k a(\xi) y(\xi), & \sigma_1 < |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

где $a(\cdot)$ — некоторая ограниченная функция. В образах Фурье для оценки квадрата погрешности таких методов получаем следующую задачу

$$\begin{aligned} (5.66) \quad &\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_1} \xi^{2k} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1 < |\xi| < \sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq \sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ &\int_{|\xi| < \sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \end{aligned}$$

Обозначим слагаемые, стоящие в максимизируемом функционале, через I_1 , I_2 и I_3 . Имеем

$$I_1 \leq \frac{\sigma_1^{2k}}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_1} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi = \frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_1} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi.$$

Аналогично неравенству (5.52) получаем

$$\xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 \leq S(\xi)(\hat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \hat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2),$$

где функция $S(\cdot)$ определена равенством (5.53). Если $a(\cdot)$ выбрать так, чтобы $S(\xi) \leq 1$, то будем иметь

$$\xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 \leq \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \hat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2.$$

Отсюда

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1 < |\xi| < \sigma} (\hat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \hat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2) d\xi.$$

Покажем, что функцию $a(\cdot)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $S(\xi) \leq 1$. В силу того, что это неравенство эквивалентно неравенству (5.54), достаточно показать, что при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k} \geq 0.$$

Действительно, минимальные значения этой функции принимаются в точках

$$|\xi| = \left(\frac{k}{\hat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{1}{2(r-k)}}.$$

Они равны величине

$$\mu = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \left(\frac{k}{\hat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{r}{r-k}} - \left(\frac{k}{\hat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{k}{r-k}} = \hat{\lambda}_1 - \left(\frac{k}{\hat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{k}.$$

Если $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_1$, то

$$\mu = \sigma_1^{2k} - \sigma^{2k} \left(\frac{k}{r} \right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{k} = \sigma_1^{2k} - \frac{\hat{\sigma}_1^{2k}}{\hat{\sigma}^{2k}} \sigma^{2k} \geq 0.$$

Если же $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_4$, то

$$\mu = \sigma_1^{2k} - \left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_1} \sigma_1 \right)^{2k} \left(\frac{k}{r} \right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{k} = 0.$$

Принимая во внимание неравенство (5.54), получаем, что для функции $a(\cdot)$ справедливо представление (5.61).

Для I_3 имеем

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq \sigma} \xi^{-2(r-k)} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{\sigma^{-2(r-k)}}{2\pi} \int_{|\xi| \geq \sigma} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi.$$

Следовательно, для случая, когда $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_1$,

$$(5.67) \quad I_3 \leq \frac{\hat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{|\xi| \geq \sigma} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi.$$

В случае, когда $(\sigma, \sigma_1) \in \Sigma_4$,

$$\sigma_1 \leq \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}} \sigma.$$

Поэтому

$$\hat{\lambda}_2 = \left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_1} \sigma_1 \right)^{-2(r-k)} \geq \sigma^{-2(r-k)}.$$

Тем самым и в этом случае неравенство (5.67) выполнено.

Складывая оценки, полученные для I_1 , I_2 и I_3 , получаем оценку для значения экстремальной задачи (5.66)

$$I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{|\xi| < \sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi + \frac{\hat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_1} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} e(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \hat{\varphi}) &\leq \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2} \\ &\leq E(x^{(k)}(\cdot), W_{F,2,2}^r(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta). \end{aligned}$$

Тем самым $\hat{\varphi}(y)(\cdot)$ — оптимальный метод восстановления, а для его погрешности справедливо равенство (5.60). $\square$

5.8. Оптимальное восстановление производных и неравенства для производных колмогоровского типа

Под неравенствами для производных колмогоровского типа традиционно понимают мультипликативные неравенства вида

$$(5.68) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta,$$

где $0 \leq k < n$ — целые, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\alpha, \beta \geq 0$, а $T = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. При этом считается, что функции $x(\cdot) \in L_p(T)$, имеют $(n-1)$ -ую производную, локально абсолютно непрерывную на T , и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(T)$. Пространство таких функций обозначим через $\mathcal{W}_{p,r}^n(T)$. Неравенство (5.68) с наименьшей константой будем называть *точным*.

Точные неравенства для производных тесно связаны с задачами оптимального восстановления производных. Рассмотрим задачу восстановления производной $x^{(k)}(\cdot)$ в метрике $L_q(T)$ на классе

$$W_{p,r}^n(T) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,r}^n(T) : \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq 1\}$$

по функции $x(\cdot)$, заданной с ошибкой в метрике $L_p(T)$. Для каждого метода восстановления $\varphi : L_p(T) \rightarrow L_q(T)$ определим его погрешность равенством

$$e_q(x^{(k)}(\cdot), W_{p,r}^n(T), \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,r}^n(T), \ y(\cdot) \in L_p(T) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_q(T)}.$$

Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$(5.69) \quad E_q(x^{(k)}(\cdot), W_{p,r}^n(T), \delta) = \inf_{\varphi : L_p(T) \rightarrow L_q(T)} e_q(x^{(k)}(\cdot), W_{p,r}^n(T), \delta, \varphi)$$

и метода, на котором достигается эта нижняя грань, называемым оптимальным.

Из леммы 2.1 получается оценка снизу

$$(5.70) \quad E_q(x^{(k)}(\cdot), W_{p,r}^n(T), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,r}^n(T) \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}.$$

Тем самым значение экстремальной задачи

$$(5.71) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq 1$$

дает оценку снизу погрешности оптимального восстановления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. Если K — точная константа в неравенстве (5.68), а S — значение задачи (5.71), то

$$S = K\delta^\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $S \leq K\delta^\alpha$. Докажем, что имеет место равенство. В силу определения точной константы для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $x_0(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,r}^n(T)$, для которой

$$\|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} > (K - \varepsilon) \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = cx_0(\rho t)$, $c, \rho > 0$. Выберем c и ρ так, чтобы $\|y(\cdot)\|_{L_p(T)} = \delta$, а $\|y^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} = 1$. Несложные вычисления показывают, что

$$\rho = \left(\frac{\|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}}{\delta \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1}{n-1/r+1/p}}, \quad c = \frac{\delta}{\|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}} \left(\frac{\|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}}{\delta \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1/p}{n-1/r+1/p}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &\geq \|y^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} = c\rho^{k-1/q} \|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \\ &= \|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \frac{\delta^\alpha}{\|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta} > (K - \varepsilon)\delta^\alpha. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $S \geq K\delta^\alpha$. $\square$

Рассмотрим задачу о нахождении точной констант в неравенстве

$$(5.72) \quad |x^{(k)}(0)| \leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.14. *Константа K является точной в неравенстве (5.68) при $q = \infty$ в том и только в том случае, когда она является точной в неравенстве (5.72).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q = \infty$. Докажем, что неравенство (5.68) выполнено в том и только в том случае, когда выполнено неравенство (5.72). Если выполнено неравенство (5.68), то неравенство (5.72) очевидно выполняется. Пусть выполнено неравенство (5.72). Докажем, что для всех $\tau \in T$

$$|x^{(k)}(\tau)| \leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

Предположим, что это не так. Тогда найдется функция $\hat{x}(\cdot)$ такая, что

$$|\hat{x}^{(k)}(\tau)| > K \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

Положим $y(t) = \hat{x}(t + \tau)$. Тогда $y^{(k)}(0) = \hat{x}^{(k)}(\tau)$, а $\|y(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(T)}$ и $\|y^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}$. Тем самым

$$|y^{(k)}(0)| = |\hat{x}^{(k)}(\tau)| > K \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta \geq K \|y(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|y^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

Это противоречит выполнению неравенства (5.72) для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,r}^n(T)$. $\square$

Займемся исследованием вопроса о том, при каких условиях неравенство (5.68) может выполняться.

Пусть S — отрезок числовой прямой, полупрямая или прямая. Через $\mathcal{W}_{p,r}^n(S)$ обозначим множество функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$ -ая производная абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a, b] \subset S$, $x(\cdot) \in L_p(S)$ и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(S)$.

ТЕОРЕМА 5.15. *Пусть $p, q, r \geq 1$, $0 \leq k < n$ и*

$$\frac{n-k}{p} + \frac{k}{r} \geq \frac{n}{q}.$$

Тогда для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,r}^n(T)$ при всех δ , $0 < \delta < \text{mes } S$, выполнено неравенство

$$(5.73) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq A \left(\delta^{-k-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} + \delta^{n-k-1/r+1/q} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \right),$$

где A не зависит от δ и S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что S — отрезок на прямой, так как случай $\text{mes } S = \infty$ получается предельным переходом. Доказательство проведем с помощью индукции по параметру n .

1. $n = 1$, $k = 0$. Для $t_0 \in S$ и $\delta > 0$ положим $T_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap S$. Для функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^1(S)$ выберем $t_1 \in T_\delta$ так, чтобы

$$|x(t_1)| = \min_{t \in T_\delta} |x(t)|.$$

Имеем

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T_\delta)} \geq |x(t_1)| (\text{mes } T_\delta)^{1/p} \geq \delta^{1/p} |x(t_1)|.$$

По неравенству Гельдера

$$\int_{t_1}^{t_0} |x'(t)| dt \leq \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(T_\delta)}.$$

Из равенства

$$x(t_0) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} x'(t) dt$$

получаем

$$\begin{aligned} |x(t_0)| &\leq \delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(T_\delta)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(T_\delta)} \\ &\leq \delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

В силу произвольности t_0 доказано, что

$$(5.74) \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(S)} \leq \delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}.$$

Пусть теперь $q \geq p$. Тогда

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(S)} = \left(\int_S |x(t)|^p |x(t)|^{q-p} dt \right)^{1/q} \leq \|x(\cdot)\|_{L_\infty(S)}^{1-p/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p/q}.$$

Пользуясь неравенством (5.74) и тем, что

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq \delta^{1/p} \left(\delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

получаем

$$(5.75) \quad \|x(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq \delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}.$$

Тем самым теорема при $n = 1$ доказана.

2. $n = 2$, $k = 1$. Пусть $q \geq p \geq 1$. Докажем, что для всех функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^1(S)$, $S = [a, b]$, имеет место неравенство

$$(5.76) \quad \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_q(S)} \leq 4 \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^\alpha \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1 - 1/r + 1/q}{1 - 1/r + 1/p},$$

а точка $\xi \in S$ такова, что

$$(5.77) \quad |x(\xi)| = \min_{t \in S} |x(t)|.$$

Положим $y(\cdot) = x(\cdot) - x(\xi)$. Тогда $|y(t)| \leq |x(t)|$ и, следовательно,

$$\|y(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}.$$

Пусть $S_1 = (-\infty, b]$, а $S_2 = [a, +\infty)$. Функции

$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq \xi, \\ y(t), & \xi < t \leq b, \end{cases} \quad y_2(t) = \begin{cases} y(t), & a \leq t < \xi, \\ 0, & \xi < t < +\infty, \end{cases}$$

локально абсолютно непрерывны. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|y_j(\cdot)\|_{L_p(S_j)} &\leq \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}, \\ \|y'_j(\cdot)\|_{L_r(S_j)} &\leq \|y'(\cdot)\|_{L_r(S)} = \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_j(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^1(S_j)$, $j = 1, 2$. Из (5.75) получаем

$$\begin{aligned} \|y_j(\cdot)\|_{L_q(S_j)} &\leq \delta^{-1/p+1/q} \|y_j(\cdot)\|_{L_p(S_j)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|y'_j(\cdot)\|_{L_r(S_j)} \\ &\leq \delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

Поскольку $y(\cdot) = y_1(\cdot) + y_2(\cdot)$, то

$$\|y(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 2 \left(\delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Положив

$$\delta = \left(\frac{\|x(\cdot)\|_{L_p(S)}}{\|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}} \right)^{(1-1/r+1/p)^{-1}},$$

получим неравенство (5.76).

Покажем, что если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ и $x'(\cdot)$ имеет хотя бы один нуль на S , то при $1/p + 1/r \geq 2/q$

$$(5.78) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^\alpha \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha},$$

где

$$\begin{aligned} K &= \begin{cases} 2^{\frac{3\alpha_2+2}{1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}}, & q > 1, \\ 8, & q = 1, \end{cases}, \quad \alpha_1 = \frac{1-1/q}{1-1/q+1/p}, \\ \alpha_2 &= \frac{1-1/r+1/q}{2-1/r}, \quad \alpha = \frac{1-1/r+1/q}{2-1/r+1/p}. \end{aligned}$$

При $\|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} = 0$ утверждение очевидно, так как $\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} = 0$. Предположим сначала, что $x'(\cdot)$ не меняет знака на S . Тогда для любой точки $t_0 \in S$

$$(5.79) \quad \|x'(\cdot)\|_{L(S)} = \int_S |x'(t)| dt = \left| \int_S x'(t) dt \right| = |x(b) - x(a)| \leq |x(b) - x(t_0)| + |x(a) - x(t_0)| \leq 2 \|x(\cdot) - x(t_0)\|_{L_\infty(S)}.$$

Так как $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ и $\text{mes } S < \infty$, то $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pq}^1(S)$ и $x'(\cdot) \in \mathcal{W}_{1r}^1(S)$. Применяя неравенство (5.76), получаем

$$(5.80) \quad \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)} \leq 4 \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha_1} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^{1-\alpha_1},$$

$$(5.81) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 4 \|x'(\cdot)\|_{L(S)}^{\alpha_2} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha_2},$$

где точка $\xi \in S$ такова, что выполнено условие (5.77). Оценивая в (5.81) $\|x'(\cdot)\|_{L(S)}$ с помощью (5.79) (при $t_0 = \xi$), имеем

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 4 \cdot 2^{\alpha_2} \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)}^{\alpha_2} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha_2}.$$

Используя оценку (5.80), получаем неравенство

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 4 \cdot 2^{\alpha_2} \left(4 \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha_1} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^{1-\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha_2},$$

из которого при $q > 1$ следует (5.78).

Если $q = 1$, то из условия $1/p + 1/r \geq 2/q$ вытекает, что $p = r = 1$. В этом случае из уже доказанного неравенства (5.80) при $p = 1$, $q = \infty$ имеем

$$\|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)} \leq 4\|x(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2}\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(S)}^{1/2}.$$

Из равенства

$$x'(t) = \int_{t_1}^t x''(\tau) d\tau,$$

где t_1 — нуль $x'(\cdot)$, получаем

$$\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(S)} \leq \|x''(\cdot)\|_{L(S)}.$$

Тем самым, учитывая (5.79), имеем

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L(S)} &\leq 2\|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)} \leq 8\|x(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2}\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(S)}^{1/2} \\ &\leq 8\|x(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2}\|x''(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Докажем теперь неравенство (5.78) в предположении, что у функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ имеется хотя бы один нуль производной на S , но не предполагая, что $x'(\cdot)$ сохраняет знак на S . Для этого рассмотрим множество точек разрыва функции $\text{sign } x'(\cdot)$. Это замкнутое множество разбивает S не более чем на счетное множество интервалов E_k , $k \in A$. На каждом отрезке $\overline{E}_k$ функция $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(\overline{E}_k)$, $x'(\cdot)$ не меняет знака и имеет хотя бы один нуль. Применяя неравенство (5.78), получаем

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^q &= \sum_{k \in A} \int_{\overline{E}_k} |x'(t)|^q dt \\ &\leq \sum_{k \in A} K \left(\int_{\overline{E}_k} |x(t)|^p dt \right)^{\alpha q/p} \left(\int_{\overline{E}_k} |x''(t)|^r dt \right)^{(1-\alpha)q/r}. \end{aligned}$$

Из условия $1/p + 1/r \geq 2/q$ вытекает, что

$$\frac{\alpha q}{p} + \frac{(1-\alpha)q}{r} \geq 1.$$

Воспользуемся неравенством (см. предложение 7.51 и следствие 7.52)

$$\sum_{k \in A} a_k^\lambda b_k^\mu \leq \left(\sum_{k \in A} a_k \right)^\lambda \left(\sum_{k \in A} b_k \right)^\mu, \quad \lambda + \mu \geq 1.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^q &\leq K \left(\sum_{k \in A} \int_{\overline{E}_k} |x(t)|^p dt \right)^{\alpha q/p} \left(\sum_{k \in A} \int_{\overline{E}_k} |x''(t)|^r dt \right)^{(1-\alpha)q/r} \\ &= K \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{(1-\alpha)q}. \end{aligned}$$

Поскольку при $\alpha \in [0, 1]$

$$A^\alpha B^{1-\alpha} \leq \alpha A + (1-\alpha)B \leq A + B,$$

то при всех $\delta > 0$

$$\begin{aligned} (5.82) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^\alpha \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha} \\ &= K \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \right)^\alpha \left(\delta^{1-1/r+1/q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} \right)^{1-\alpha} \\ &\leq K \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} \right). \end{aligned}$$

Завершим доказательство теоремы для $n = 2$, $k = 1$. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ и $p_1(t) = a_0 + a_1 t$ — полином наилучшего приближения $x(\cdot)$ в метрике $L_p(S)$. Положим $\varphi(\cdot) = x(\cdot) - p_1(\cdot)$. Очевидно, что

$$(5.83) \quad \|\varphi(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}, \quad \|\varphi''(\cdot)\|_{L_r(S)} = \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}, \\ \|p_1(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq 2\|x(\cdot)\|_{L_p(S)}.$$

Нетрудно убедиться, что при всех $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_S |a_0 + a_1 t| dt \geq \frac{|a_1|}{4} (\text{mes } S)^2.$$

Отсюда для любого $0 < \delta < \text{mes } S$

$$(5.84) \quad \|p_1'(\cdot)\|_{L_q(S)} = |a_1| (\text{mes } S)^{1/q} \leq 4(\text{mes } S)^{-2+1/q} \int_S |p_1(t)| dt \\ \leq 4(\text{mes } S)^{-1-1/p+1/q} \|p_1(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq 8\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}.$$

Функция $\varphi(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$, а так как $x(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ имеют по меньшей мере две общие точки, то $\varphi'(\cdot)$ имеет хотя бы один нуль на S . Из (5.84) и (5.82) с учетом (5.83) получаем, что для любого $0 < \delta < \text{mes } S$ имеет место неравенство

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq \|p_1'(\cdot)\|_{L_q(S)} + \|\varphi'(\cdot)\|_{L_q(S)} \\ \leq (K + 8) \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Итак, теорема для $n = 2$ и $k = 1$ доказана.

3. $n > 2$, $0 < k < n$. Предположим, что теорема верна для всех $l \leq n$ и всех $0 < k < l$. Докажем ее для $l = n + 1$ и всех $0 < k \leq n$. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^{n+1}(S)$ и выполняются условия

$$(5.85) \quad \frac{n+1-k}{p} + \frac{k}{r} \geq \frac{n+1}{q}.$$

1а. $k > 1$. В силу условия (5.85) имеет место неравенство

$$\frac{n+1-k}{p} + \frac{k}{r} - \frac{n+1}{q} \geq \frac{1}{k} \left(\frac{n+1-k}{p} + \frac{k}{r} - \frac{n+1}{q} \right).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(5.86) \quad (n+1-k) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{pk} + \frac{1}{qk} \right) \geq \frac{n}{q} - \frac{k-1}{r}.$$

Положим

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{pk} + \frac{1}{qk}.$$

Если $1/q - 1/p \leq 0$, то $1/q_1 \leq 1/p \leq 1$. Если же $1/q - 1/p > 0$, то из того, что $k \geq 2$, получаем

$$\frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} \leq 1.$$

Итак, существует $q_1 \geq 1$ такое, что

$$(5.87) \quad \frac{k-1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{q_1}.$$

Если записать неравенство (5.86), используя обозначение q_1 , то получим неравенство

$$(5.88) \quad \frac{n+1-k}{q_1} + \frac{k-1}{r} \geq \frac{n}{q}.$$

Из того, что $x(\cdot)$ и $x^{(k)}(\cdot)$ непрерывны на S , а $\text{mes } S < \infty$, следует, что $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pq}^k(S)$. Тогда по предположению индукции, учитывая (5.87), при всех $0 < \delta_1 < \text{mes } S$ имеем

$$(5.89) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \leq A_1 \left(\delta_1^{-1-1/p+1/q_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta_1^{k-1-1/q+1/q_1} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \right).$$

Теперь в силу того, что $x'(\cdot) \in \mathcal{W}_{q_1,r}^n(S)$, учитывая (5.88), при всех $0 < \delta < \text{mes } S$ получаем

$$(5.90) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A_2 \left(\delta^{1-k-1/q_1+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} + \delta^{n-k+1-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Положим $\delta_1 = \gamma\delta$, $0 < \gamma \leq 1$. Из (5.89), (5.90) следует, что

$$\begin{aligned} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq A_1 A_2 \gamma^{-1-1/p+1/q_1} \delta^{-k-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \\ &\quad + A_1 A_2 \gamma^{k-1-1/q+1/q_1} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} + A_2 \delta^{n-k+1-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

Выбирая γ так, чтобы

$$A_1 A_2 \gamma^{k-1-1/q+1/q_1} \leq 1/2,$$

получаем

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A \left(\delta^{-k-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-k+1-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

где

$$A = 2 \max \left(A_1 A_2 \gamma^{-1-1/p+1/q_1}, A_2 \right).$$

1b. $k = 1$. В силу условия (5.85) имеет место неравенство

$$\frac{n}{p} + \frac{1}{r} - \frac{n+1}{q} \geq \frac{1}{n} \left(\frac{n}{p} + \frac{1}{r} - \frac{n+1}{q} \right).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(5.91) \quad \frac{n-1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} + \frac{1}{nq} \geq \frac{n}{q}.$$

Положим

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} + \frac{1}{nq}.$$

Если $1/q - 1/r \leq 0$, то $1/q_1 \leq 1/r \leq 1$. Если же $1/q - 1/r > 0$, то из того, что $n \geq 2$, получаем

$$\frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2r} + \frac{1}{2q} \leq 1.$$

Итак, существует $q_1 \geq 1$ такое, что

$$(5.92) \quad \frac{1}{q} + \frac{n-1}{r} = \frac{n}{q_1}.$$

Если записать неравенство (5.91), используя обозначение q_1 , то получим неравенство

$$(5.93) \quad \frac{n-1}{p} + \frac{1}{q_1} \geq \frac{n}{q}.$$

По предположению индукции, учитывая (5.93) и то, что $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,q_1}^n(S)$, при всех $0 < \delta_1 < \text{mes } S$ имеем

$$(5.94) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A_1 \left(\delta_1^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta_1^{n-1-1/q_1+1/q} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \right).$$

В силу того, что $x'(\cdot) \in \mathcal{W}_{q,r}^n(S)$, учитывая (5.92), при всех $0 < \delta < \text{mes } S$ получаем

$$(5.95) \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \leq A_2 \left(\delta^{-n+1-1/q+1/q_1} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} + \delta^{1-1/r+1/q_1} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Положим $\delta_1 = \gamma\delta$, $0 < \gamma \leq 1$. Из (5.94), (5.95) следует, что

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq A_1 \gamma^{-1-1/p+1/q} \delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \\ &\quad + A_1 A_2 \gamma^{n-1-1/q_1+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \\ &\quad + A_1 A_2 \gamma^{n-1-1/q_1+1/q} \delta^{n-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

Выбирая γ так, чтобы

$$A_1 A_2 \gamma^{n-1-1/q_1+1/q} \leq 1/2,$$

получаем

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

где

$$A = \max \left(2A_1 \gamma^{-1-1/p+1/q}, 1 \right).$$

4. $n \geq 2$, $k = 0$. Определим q_1 равенством

$$\frac{n-1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{n}{q_1}.$$

Аналогично тому, как это делалось в п.п. **1a** и **1b**, доказывается, что $q_1 \geq 1$. Тем самым в силу п. **1b**

$$(5.96) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \leq A_1 \left(\delta^{-1-1/p+1/q_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-1-1/r+1/q_1} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Из (5.75) следует, что

$$(5.97) \quad \|x(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq \delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/q_1+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)}.$$

Из (5.96) и (5.97) получаем

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq (A_1 + 1) \left(\delta^{-1/p+1/q_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-1/r+1/q} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

□

ТЕОРЕМА 5.16. Если

$$(5.98) \quad n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \neq 0,$$

то для того, чтобы для функций из $\mathcal{W}_{p,r}^n(T)$ имело место неравенство (5.68), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} 1) \quad \alpha &= \frac{n-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}{n-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}, \quad \beta = \frac{k-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}{n-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}, \\ 2) \quad \frac{n-k}{p} + \frac{k}{r} &\geq \frac{n}{q}. \end{aligned}$$

Если условие (5.98) не выполнено, то для того, чтобы для функций из $\mathcal{W}_{p,r}^n(T)$ имело место неравенство (5.68), необходимо и достаточно, чтобы

$$q = \infty, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Достаточность. Пусть условие (5.98) выполнено. Положив в теореме 5.15

$$\delta = \left(\frac{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}}{\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1}{n-1/r+1/p}},$$

получим неравенство (5.68). Пусть условие (5.98) не выполнено. Это означает, что $n = 1$, $r = 1$ и $p = \infty$. Если при этом $q = \infty$, $\alpha = 1$, а $\beta = 0$, то неравенство (5.68) становится очевидным тождеством.

2. Необходимость. Пусть для функций из $\mathcal{W}_{p,r}^n(T)$ справедливо неравенство (5.68). Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^n(1-t)^n, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1], \end{cases} \quad \psi(t) = \sum_{j=0}^n \varphi(t-j).$$

Рассмотрим функцию $y(t) = \gamma\psi(\rho t)$, где $\gamma, \rho > 0$. Нетрудно убедиться, что при всех $p \geq 1$ и $j \leq n$

$$\|y^{(j)}(\cdot)\|_{L_p(T)} = n^{1/p} \gamma \rho^{j-1/p} \|\varphi^{(j)}(\cdot)\|_{L_p(T)}.$$

Так как $y(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,r}^n(T)$, то должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} n^{1/q} \gamma \rho^{k-1/q} \|\varphi^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \\ \leq K n^{\alpha/p+\beta/r} \gamma^{\alpha+\beta} \rho^{-\alpha/p+\beta(n-1/r)} \|\varphi(\cdot)\|_{L_q(T)}^{\alpha} \|\varphi^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^{\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{r} \geq \frac{1}{q}, \\ b) \quad & \alpha + \beta = 1, \\ c) \quad & k - \frac{1}{q} = -\frac{\alpha}{p} + \beta \left(n - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Из b) и c) получаем

$$\alpha \left(n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \right) = n - k - \frac{1}{r} + \frac{1}{q}.$$

При выполнении условия (5.98) из этого равенства получаются равенства 1). А из 1) и a) вытекает неравенство 2).

Если условие (5.98) не выполнено, то, как было отмечено, $n = 1$, $r = 1$ и $p = \infty$. Тогда из c) вытекает, что $q = \infty$ и неравенство (5.68) имеет вид

$$\|x(\cdot)\|_{L_{\infty}(T)} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_{\infty}(T)}^{\alpha} \|x'(\cdot)\|_{L_1(T)}^{\beta}.$$

Очевидно, что это неравенство не может быть выполнено при $\beta \neq 0$ (достаточно подставить $x(t) \equiv 1$. Таким образом, в этом случае $\beta = 0$, а $\alpha = 1$. $\square$

5.9. Восстановление производных на полупрямой

Рассмотрим задачу о нахождении величины $E_{\infty}(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta)$ (см. (5.69)) и соответствующего метода оптимального восстановления. Тем самым речь идет о восстановлении $x^{(k)}(\cdot)$ в метрике $L_{\infty}(\mathbb{R}_+)$ на классе $W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ по информации о самой функции $x(\cdot)$, заданной с погрешностью в метрике $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Положим

$$\lambda_j = e^{(n+2j-1)\frac{i\pi}{2n}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-1} & \dots & \lambda_n^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Через $A_{s,j}$ обозначим алгебраическое дополнение к элементу λ_j^{n+s-1} . Через $|A|$ будем обозначать определитель матрицы A .

ЛЕММА 5.17. Пусть $0 \leq k < n$. Для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ имеет место равенство

$$(5.99) \quad x^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{x}(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \widehat{x}^{(n)}(t) dt,$$

где

$$\widehat{x}(t) = \frac{(-1)^{n-k}}{|A|} \sum_{j=1}^n A_{n-k,j} e^{\lambda_j t}.$$

Кроме того,

$$(5.100) \quad \widehat{x}^{(k)}(0) = \widehat{A}_{n,k}^2,$$

где

$$\widehat{A}_{n,k} = \frac{1}{\sin^{1/2}((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\lambda_j^{2n} = (-1)^{n-1}$, $j = 1, \dots, n$, имеет место равенство

$$\widehat{x}(t) + (-1)^n \widehat{x}^{(2n)}(t) = 0.$$

Так как $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то $\widehat{x}^{(s)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, $s = 0, 1, \dots, 2n$. Тем самым для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{x}(t) dt + (-1)^n \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{x}^{(2n)}(t) dt = 0.$$

Так как $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$, то из теоремы 5.16 вытекает, что $x^{(l)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ при всех $l = 1, \dots, n-1$. Из той же теоремы вытекает справедливость неравенства

$$\|x^{(l)}(\cdot)\|_{L_\infty([a,+\infty))} \leq A \|x(\cdot)\|_{L_2([a,+\infty))}^{\frac{2n-2l-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([a,+\infty))}^{\frac{2l+1}{2n}}$$

при всех $a > 0$. Поэтому $x^{(l)}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Принимая это во внимание и интегрируя по частям, получаем

$$(5.101) \quad \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{x}(t) dt + (-1)^n \sum_{l=1}^n (-1)^l x^{(l-1)}(0) \widehat{x}^{(2n-l)}(0) + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \widehat{x}^{(n)}(t) dt = 0.$$

Для всех $s, l = 1, \dots, n$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n A_{s,j} \lambda_j^{n+l-1} = \delta_{ls} |A|,$$

где δ_{ls} — символ Кронекера. Следовательно,

$$(5.102) \quad \widehat{x}^{(2n-l)}(0) = \frac{(-1)^{n-k}}{|A|} \sum_{j=1}^n A_{n-k,j} \lambda_j^{2n-l} = (-1)^{n-k} \delta_{n-l+1, n-k}.$$

Подставив (5.102) в (5.101), получим равенство

$$(5.103) \quad x^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{x}(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \widehat{x}^{(n)}(t) dt.$$

Найдем $\widehat{x}^{(k)}(0)$. Имеем

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{n-k}}{|A|} \sum_{j=1}^n A_{n-k,j} \lambda_j^k = (-1)^{n-k} \frac{|A_k|}{|A|},$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-k-2} & \dots & \lambda_n^{2n-k-2} \\ \lambda_1^k & \dots & \lambda_n^k \\ \lambda_1^{2n-k} & \dots & \lambda_n^{2n-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-1} & \dots & \lambda_n^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что

$$\lambda_j^m = \sigma_m \mu_m^{j-1},$$

где

$$|\sigma_m| = 1, \quad \mu_m = e^{i \frac{\pi m}{n}},$$

матрицы A и A_k могут быть записаны в виде

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_n & \dots & \sigma_n \mu_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-1} & \dots & \sigma_{2n-1} \mu_{2n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \sigma_n & \dots & \sigma_n \mu_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-k-2} & \dots & \sigma_{2n-k-2} \mu_{2n-k-2}^{n-1} \\ \sigma_k & \dots & \sigma_k \mu_k^{n-1} \\ \sigma_{2n-k} & \dots & \sigma_{2n-k} \mu_{2n-k}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-1} & \dots & \sigma_{2n-1} \mu_{2n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Так как очевидно, что $\operatorname{Re} \widehat{x}(\cdot), \operatorname{Im} \widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$, можно подставить $x(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$ в равенство (5.103). Тогда получим

$$(5.104) \quad \widehat{x}^{(k)}(0) = \|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Следовательно, $\widehat{x}^{(k)}(0) > 0$. Пользуясь этим и формулой для определителя Вандермонда, находим, что

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k}}^n \frac{|\mu_k - \mu_{n+j-1}|}{|\mu_{2n-k-1} - \mu_{n+j-1}|}.$$

Из равенства

$$|\mu_l - \mu_s| = 2|\sin(l-s)\alpha|, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n},$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \widehat{x}^{(k)}(0) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k}}^n \frac{|\sin(n+j-k-1)\alpha|}{|\sin(n+j+k)\alpha|} \\
 &= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \frac{\prod_{j=k+1}^{k+n} \sin j\alpha}{\prod_{j=1}^k \sin j\alpha \prod_{j=1}^{n-k-1} \sin j\alpha} \\
 &= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \frac{\prod_{j=k+1}^{n-1} \sin j\alpha \prod_{j=n+1}^{n+k} \sin j\alpha}{\prod_{j=1}^k \sin j\alpha \prod_{j=1}^{n-k-1} \sin j\alpha} \\
 &= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha \frac{\prod_{j=k+1}^{n-1} \sin j\alpha}{\prod_{j=1}^{n-k-1} \sin j\alpha} \\
 &= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha \prod_{j=1}^{n-k-1} \operatorname{ctg} j\alpha.
 \end{aligned}$$

Из того, что $\operatorname{ctg} j\alpha \operatorname{ctg}(n-j)\alpha = 1$, вытекает равенство

$$\prod_{j=1}^{n-k-1} \operatorname{ctg} j\alpha = \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha.$$

Тем самым

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg}^2 j\alpha.$$

Положим $\widehat{y}(t) = \operatorname{Re} \widehat{x}(t)$. Так как функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ вещественные, из (5.103) вытекает равенство

$$x^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{y}(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \widehat{y}^{(n)}(t) dt.$$

Положив в этом равенстве $x(\cdot) = \widehat{y}(\cdot)$, получим

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \widehat{y}^{(k)}(0) = \|\widehat{y}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{y}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Следовательно,

$$\|\widehat{y}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{y}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = \|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Тем самым $\widehat{x}(\cdot)$ — вещественная функция. Поэтому равенство (5.103) может быть записано в виде (5.99). $\square$

ТЕОРЕМА 5.18. Пусть $0 \leq k < n$. Тогда имеет место равенство

$$E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta) = \widehat{A}_{n,k} \left(\frac{2n}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}} \left(\frac{2n}{2k+1} \right)^{\frac{2k+1}{4n}} \delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}}.$$

Метод

$$(5.105) \quad \widehat{m}(y)(\tau) = \beta^{k+1} \int_{\mathbb{R}_+} y(t+\tau) \widehat{x}(\beta t) dt,$$

где

$$\beta = \left(\frac{2n-2k-1}{2k+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \delta^{-\frac{1}{n}},$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x(\cdot), y(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ положим

$$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} x(t)y(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t)y^{(n)}(t) dt.$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\begin{aligned} |x^{(k)}(0)| &= |\langle x(\cdot), \hat{x}(\cdot) \rangle| \leq \sqrt{\langle x(\cdot), x(\cdot) \rangle} \sqrt{\langle \hat{x}(\cdot), \hat{x}(\cdot) \rangle} \\ &= \left(\|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2} \left(\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая (5.104) и (5.100), получаем

$$(5.106) \quad |x^{(k)}(0)| \leq \hat{A}_{n,k} \left(\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2}.$$

Положим $y(t) = \hat{x}(bt)$, $b > 0$. Тогда

$$\|y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = \frac{1}{b} \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2, \quad \|y^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = b^{2n-1} \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Подставляя $y(\cdot)$ в (5.106), получаем, что для всех $b > 0$ выполняется неравенство

$$b^k \hat{A}_{n,k}^2 \leq \hat{A}_{n,k} \left(\frac{1}{b} \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + b^{2n-1} \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2}.$$

В силу (5.104) и (5.100) получаем, что для всех $b > 0$ имеет место неравенство $f(b) \geq 0$, где

$$f(b) = b^{2n} \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 - \hat{A}_{n,k}^2 b^{2k+1} + \hat{A}_{n,k}^2 - \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Нетрудно убедиться, что у функции $f(\cdot)$ имеется единственный минимум на $\mathbb{R}_+$ в точке

$$b_0 = \left(\frac{(2k+1)\hat{A}_{n,k}^2}{2n\|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2} \right)^{\frac{1}{2n-2k-1}}.$$

С другой стороны, $f(1) = 0$. Следовательно, $b_0 = 1$. Таким образом,

$$\|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \hat{A}_{n,k} \sqrt{\frac{2k+1}{2n}}.$$

Из (5.104) и (5.100) вытекает, что

$$\|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \hat{A}_{n,k} \sqrt{\frac{2n-2k-1}{2n}}.$$

Положим

$$\alpha = \hat{A}_{n,k}^{-1} \sqrt{\frac{2n}{2n-2k-1}} \left(\frac{2n-2k-1}{2k+1} \right)^{\frac{1}{4n}} \delta^{1-\frac{1}{2n}}.$$

Рассмотрим функцию $\hat{x}_1(t) = \alpha \hat{x}(\beta t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 &= \alpha^2 \beta^{-1} \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = \delta^2, \\ \|\hat{x}_1^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 &= \alpha^2 \beta^{2n-1} \|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = 1. \end{aligned}$$

Подставляя $\hat{x}(t) = \alpha^{-1} \hat{x}_1(t/\beta)$ в (5.99), получаем

$$x^{(k)}(0) = \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \hat{x}_1(t/\beta) dt + \alpha^{-1} \beta^{-n} \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \hat{x}_1^{(n)}(t/\beta) dt.$$

Сделаем подстановку $t = \beta s$ и положим $z(s) = x(\beta s)$. Тогда для всех $z(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ будем иметь равенство

$$(5.107) \quad z^{(k)}(0) = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} z(s) \hat{x}_1(s) ds + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} z^{(n)}(s) \hat{x}_1^{(n)}(s) ds$$

в котором

$$\lambda_1 = \frac{\beta^{k+1}}{\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha\beta^{2n-k-1}}.$$

Из (5.70) имеем

$$(5.108) \quad E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+) \\ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \\ \geq \|\hat{x}_1^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \geq |\hat{x}_1^{(k)}(0)| = \lambda_1\delta^2 + \lambda_2.$$

Пусть $y(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим функцию $z(t) = y(t + \tau)$, где $\tau \geq 0$. Подставив эту функцию в (5.107), получим, что для любой функции $y(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ и любого $\tau \geq 0$ справедливо равенство

$$(5.109) \quad y^{(k)}(\tau) = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} y(s + \tau) \hat{x}_1(s) ds + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} y^{(n)}(s + \tau) \hat{x}_1^{(n)}(s) ds$$

Оценим погрешность метода (5.105), который можно записать в виде

$$\hat{m}(y)(\tau) = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} y(t + \tau) \overline{\hat{x}_1(t)} dt.$$

Предположим, что $z(\cdot) \in W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ и $\|z(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta$. Учитывая равенство (5.109), имеем

$$\begin{aligned} & |z^{(k)}(\tau) - \hat{m}(y)(\tau)| \\ &= \left| z^{(k)}(\tau) - \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} z(t + \tau) \hat{x}_1(t) dt + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} (z(t + \tau) - y(t + \tau)) \hat{x}_1(t) dt \right| \\ &= \left| \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} (z(t + \tau) - y(t + \tau)) \hat{x}_1(t) dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} z^{(n)}(t + \tau) \hat{x}_1^{(n)}(t) dt \right| \\ &\leq \lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} |z(t + \tau) - y(t + \tau)|^2 dt \right)^{1/2} \|\hat{x}_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \\ &+ \lambda_2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} |z^{(n)}(t + \tau)|^2 dt \right)^{1/2} \|\hat{x}_1^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \lambda_1 \delta \left(\int_{\tau}^{+\infty} |z(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\quad + \lambda_2 \left(\int_{\tau}^{+\infty} |z^{(n)}(t + \tau)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z^{(k)}(\cdot) - \hat{m}(y)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2.$$

Таким образом, принимая во внимание (5.108), получаем

$$\begin{aligned} E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta) &\leq e_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta, \hat{m}) \\ &\leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2 \leq E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что метод (5.105) является оптимальным, а

$$\begin{aligned} E_\infty(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+), \delta) &= \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2 \\ &= \hat{A}_{n,k} \left(\frac{2n}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}} \left(\frac{2n}{2k+1} \right)^{\frac{2k+1}{4n}} \delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}}. \end{aligned}$$

□

Из (5.108) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{2,2}^n(\mathbb{R}_+) \\ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} &= \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2 \\ &= \hat{A}_{n,k} \left(\frac{2n}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}} \left(\frac{2n}{2k+1} \right)^{\frac{2k+1}{4n}} \delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}}. \end{aligned}$$

Применяя предложение 5.13, получаем точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq K_{nk} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{\frac{2n-2k-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{\frac{2k+1}{2n}},$$

где

$$\begin{aligned} K_{nk} &= \hat{A}_{n,k} \left(\frac{2n}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}} \left(\frac{2n}{2k+1} \right)^{\frac{2k+1}{4n}} \\ &= \hat{A}_{n,k} \sqrt{\frac{2n}{2n-2k-1}} \left(\frac{2n-2k-1}{2k+1} \right)^{\frac{2k+1}{4n}}. \end{aligned}$$

5.10. Восстановление производных в многомерном случае

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. В п.п. 3.8 и 3.9 рассматривалась задача об оптимальном восстановлении оператора D^α (см. (3.71)) на классах, задаваемых степенью оператора Лапласа, по неточно заданному преобразованию Фурье. Здесь будет рассматриваться задача оптимального восстановления оператора D^α по неточно заданным производным D^{α_j} , $j = 1, \dots, m$, на классах, задаваемых ограничениями на другие производные D^{α_j} , $j = m+1, \dots, N$. Перейдем к точной постановке задачи.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $\alpha^j \in \mathbb{R}_+^d$, $j = 0, 1, \dots, N$, и $\mathcal{A} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$. Положим

$$\mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : D^{\alpha^j} x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, N\}.$$

Пусть, далее, $\bar{\delta} = (\delta_{m+1}, \dots, \delta_N)$, где $\delta_j > 0$, $j = m+1, \dots, N$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq N$. Рассмотрим следующий класс функций

$$\mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d) : \|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j = m+1, \dots, N\}$$

(при $m = N$ полагаем $\mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}) = \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d)$).

Предположим, что функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta})$ известны приближенно, или точнее, нам известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, m$, такие, что

$$\|D^{\alpha^j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j = 1, \dots, m,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. По этой информации мы хотим восстановить производную $D^{\alpha^0} x(\cdot)$ на классе $\mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta})$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$. Любой метод восстановления φ — это отображение из $(L_2(\mathbb{R}^d))^m$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$\begin{aligned} e(D^{\alpha^0}, \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta, \varphi) &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), y(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^m \\ \|D^{\alpha^j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, m}} \|D^{\alpha^0} x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

где $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$.

Нас будут интересовать те методы, на которых погрешность минимальна, т. е. те методы $\hat{\varphi}$, для которых

$$(5.110) \quad e(D^{\alpha^0}, \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta, \hat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e(D^{\alpha^0}, \mathcal{W}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi: (L_2(\mathbb{R}^d))^m \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$. Такие методы будем называть *оптимальными методами восстановления*. Величину справа в (5.110) будем называть *погрешностью оптимального восстановления* и обозначать $E(D^{\alpha^0}, W_2^A(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta)$.

Положим

$$Q = \text{co}\{((\alpha^1, \ln 1/\delta_1), \dots, (\alpha^N, \ln 1/\delta_N)) : \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^N) \in \mathcal{A}\},$$

где $\text{co } A$ обозначает выпуклую оболочку множества A , и определим функцию $S(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$(5.111) \quad S(\alpha) = \max\{z \in \mathbb{R} : (\alpha, z) \in Q\},$$

считая, что $S(\alpha) = -\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.

Несложная проверка показывает, что $S(\cdot)$ — вогнутая функция на $\mathbb{R}^d$ и что $S(\alpha)$ конечно тогда и только тогда, когда $\alpha \in \text{co } \mathcal{A}$.

Пусть $\alpha^0 \in \text{co } \mathcal{A}$. Тогда точка $(\alpha^0, S(\alpha^0))$ принадлежит границе выпуклого многогранника Q . Проведем опорную гиперплоскость к выпуклому многограннику Q в точке $(\alpha^0, S(\alpha^0))$. Ее можно записать в виде $z = \langle \alpha, \hat{\eta} \rangle + \hat{a}$ при некоторых $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\hat{a} \in \mathbb{R}$. По теореме Каратеодори (теорема 7.41) найдутся точки $(\alpha^{j_k}, \ln 1/\delta_{j_k})$, $k = 1, \dots, s$, $s \leq d+1$, из этой гиперплоскости такие, что

$$(5.112) \quad \alpha^0 = \sum_{k=1}^s \theta_{j_k} \alpha^{j_k}, \quad \theta_{j_k} > 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad \sum_{k=1}^s \theta_{j_k} = 1.$$

Положим

$$M = \{j_1, \dots, j_s\} \cap \{1, \dots, m\}.$$

ТЕОРЕМА 5.19. Пусть $\alpha^0 \in \text{co } \mathcal{A}$. Тогда

$$E(D^{\alpha^0}, W_2^A(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

Если $M \neq \emptyset$, то все методы вида

$$(5.113) \quad \varphi(y)(\cdot) = \sum_{j \in M} \Lambda_j y_j(\cdot),$$

где $\Lambda_j: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $j \in M$, — линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид: $F\Lambda_j y_j(\cdot) = a_j(\cdot) Fy_j(\cdot)$, а функции $a_j(\cdot)$, $j \in M$, выбраны из любой системы функций $a_{j_k}(\cdot)$, $k = 1, \dots, s$, $s \leq d+1$, удовлетворяющей условиям

$$(5.114) \quad \sum_{k=1}^s (i\xi)^{\alpha^{j_k}} a_{j_k}(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0},$$

$$(5.115) \quad \sum_{k=1}^s \frac{\delta_{j_k}^2 |a_{j_k}(\xi)|^2}{\theta_{j_k}} \leq e^{-2S(\alpha^0)},$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, являются оптимальными.

Если $M = \emptyset$, то метод $\varphi(y)(\cdot) = 0$ является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и раньше, оценку снизу получаем из леммы 2.1

$$(5.116) \quad E(D^{\alpha^0}, W_2^A(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^A(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}) \\ \|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, m}} \|D^{\alpha^0} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Согласно теореме Планшереля, квадрат значения экстремальной задачи в правой части этого неравенства равен значению такой задачи

$$(5.117) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^0} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, N,$$

где $|\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_d|^{\alpha_d}$, если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

Положим $\widehat{A} = e^{-2\widehat{a}}$, $\widehat{\xi}_j = e^{-\widehat{\eta}_j}$, $j = 1, \dots, d$, $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_d)$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим куб

$$B_\varepsilon = \{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d : \widehat{\xi}_j - \varepsilon \leq \xi_j \leq \widehat{\xi}_j, \quad j = 1, \dots, d \}$$

и функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \sqrt{\widehat{A}/|B_\varepsilon|}, & \xi \in B_\varepsilon \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon \end{cases}$$

(через $|B_\varepsilon|$ обозначен объем куба B_ε). Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \leq \widehat{A} |\widehat{\xi}|^{2\alpha^j} = e^{-2(\langle \alpha^j, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})}.$$

В силу того, что $z = \langle \alpha, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a}$ — уравнение опорной гиперплоскости к Q , имеем

$$\langle \alpha^j, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a} \geq \ln 1/\delta_j.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тем самым $x_\varepsilon(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (5.117). Из (5.116) получаем

$$E^2(D^{\alpha^0}, W_2^A(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta) \geq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^0} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \geq \widehat{A} |\widehat{\xi}_\varepsilon|^{2\alpha^0},$$

где

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = (\widehat{\xi}_1 - \varepsilon, \dots, \widehat{\xi}_d - \varepsilon).$$

Устремив ε к нулю, будем иметь

$$E(D^{\alpha^0}, W_2^A(\mathbb{R}^d, \bar{\delta}), \delta) \geq e^{-a} |\widehat{\xi}|^{\alpha^0} = e^{-(\langle \alpha^0, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})} = e^{-S(\alpha^0)}.$$

Теперь докажем оптимальность методов восстановления (5.113). Для этого оценим квадрат их погрешности, т. е. оценим значение следующей экстремальной задачи

$$\left\| D^{\alpha^0} x(\cdot) - \sum_{j \in M} \Lambda_j y_j(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \\ \|D^{\alpha^j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, m, \\ \|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = m+1, \dots, N.$$

При $M = \emptyset$ соответствующие суммы считаем равными нулю. Переходя к образам Фурье, получаем по теореме Планшереля такую задачу

$$(5.118) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| (i\xi)^{\alpha^0} Fx(\xi) - \sum_{j \in M} a_j(\xi) Fy_j(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} Fx(\xi) - Fy_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = m+1, \dots, N.$$

Положим $z_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^j} Fx(\xi) - Fy_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m$, и $\omega(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0} - \sum_{j \in M} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi)$. Тогда задача (5.118) переписывается в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \omega(\xi) Fx(\xi) + \sum_{j \in M} a_j(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = m+1, \dots, N.$$

Пусть функции $a_j(\cdot)$, $j \in M$, выбраны из системы функций $a_{j_k}(\cdot)$, $k = 1, \dots, s$, удовлетворяющей условию (5.114). Тогда надо оценить значение следующей задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_s\} \setminus M} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi) Fx(\xi) + \sum_{j \in M} a_j(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = m+1, \dots, N,$$

Положим

$$\hat{\lambda}_{j_k} = \frac{\theta_{j_k}}{\delta_{j_k}^2} e^{-2S(\alpha^0)}, \quad k = 1, \dots, s.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\left| \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_s\} \setminus M} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi) Fx(\xi) + \sum_{j \in M} a_j(\xi) z_j(\xi) \right|^2$$

$$\leq \Omega_{a(\cdot)}(\xi) \left(\sum_{j \in \{j_1, \dots, j_s\} \setminus M} \hat{\lambda}_j |\xi|^{2\alpha^j} |Fx(\xi)|^2 + \sum_{j \in M} \hat{\lambda}_j |z_j(\xi)|^2 \right),$$

где

$$\Omega_{a(\cdot)}(\xi) = \sum_{k=1}^s \frac{|a_{j_k}(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_{j_k}}, \quad a(\cdot) = (a_{j_1}(\cdot), \dots, a_{j_s}(\cdot)).$$

Интегрируя последнее неравенство, учитывая ограничения в задаче (5.118), получаем, что значение этой задачи оценивается величиной

$$\|\Omega_{a(\cdot)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \sum_{k=1}^s \hat{\lambda}_{j_k} \delta_{j_k}^2.$$

В силу равенства

$$\sum_{k=1}^s \widehat{\lambda}_{j_k} \delta_{j_k}^2 = e^{-2S(\alpha^0)}$$

погрешность методов (5.113) оценивается величиной

$$\|\Omega_{a(\cdot)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} e^{-2S(\alpha^0)},$$

что при условии $\Omega_{a(\cdot)}(\xi) \leq 1$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, т. е.

$$(5.119) \quad \sum_{k=1}^s \frac{|a_{j_k}(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_{j_k}} \leq 1$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, означает совпадение оценок снизу и сверху для погрешности оптимального восстановления и тем самым оптимальность рассматриваемых методов. Из определения $\widehat{\lambda}_{j_k}$ следует, что условие (5.119) совпадает с условием (5.115).

Остается показать, что множество функций $\alpha_j(\cdot)$, удовлетворяющих условиям (5.114) и (5.115) не пусто. Рассмотрим на $\mathbb{R}^d$ функцию

$$f(\eta) = -1 + \sum_{k=1}^s \widehat{\lambda}_{j_k} e^{-2\langle \alpha^{j_k} - \alpha^0, \eta \rangle}.$$

Это, очевидно, выпуклая функция, причем легко убедиться, что $f(\widehat{\eta}) = 0$ и производная этой функции в точке $\widehat{\eta}$ также равна нулю. Отсюда вытекает, что $f(\eta) \geq 0$ при всех $\eta \in \mathbb{R}^d$. Следовательно,

$$-e^{-2\langle \alpha^0, \eta \rangle} + \sum_{k=1}^s \widehat{\lambda}_{j_k} e^{-2\langle \alpha^{j_k}, \eta \rangle} \geq 0.$$

Положив $e^{-\eta_j} = |\xi_j|$, $j = 1, \dots, d$, получаем, что

$$(5.120) \quad -|\xi|^{2\alpha^0} + \sum_{k=1}^s \widehat{\lambda}_{j_k} |\xi|^{2\alpha^{j_k}} \geq 0$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$a_{j_k}(t) = (i\xi)^{\alpha^0} \frac{\widehat{\lambda}_{j_k} (-i\xi)^{\alpha_{j_k}}}{\sum_{k=1}^s \widehat{\lambda}_{j_k} |\xi|^{2\alpha_{j_k}}}.$$

Легко убедиться, что условие (5.114) выполнено. Имеем

$$\sum_{k=1}^s \frac{|a_{j_k}(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_{j_k}} = \frac{|\xi|^{2\alpha^0}}{\sum_{k=1}^s \widehat{\lambda}_{j_k} |\xi|^{2\alpha_{j_k}}}.$$

Теперь выполнение условия (5.115) вытекает из неравенства (5.120). $\square$

5.11. Комментарии

5.1. Формулировка теоремы 5.1 и ее доказательство взяты из учебника В. А. Ильина, Э. Г. Позняка [42]. Метод регуляризации Тихонова широко применяется в различных прикладных задачах. Тем не менее, на наш взгляд, у этого метода есть ряд недостатков. Авторы учебника [42] пишут: “... *должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом процессе.*” (Выделено жирным шрифтом

нами.) Но метод регуляризации утверждает о сходимости предложенного алгоритма при $\delta \rightarrow 0$ и не дает информации о погрешности алгоритма при данном фиксированном δ . Кроме того, мы не можем утверждать, что мы “извлекли максимальную информацию об изучаемом процессе”, так как нет гарантии, что не существует алгоритма, который дал бы лучший результат (в данной постановке нет возможности сравнивать разные алгоритмы).

5.2. Подход к задачам восстановления функции по ее неточно заданным коэффициентам Фурье, основанный на общей теории оптимального восстановления свободен от тех недостатков, которые указывались в предыдущем пункте. А именно, здесь удастся получить оценку погрешности восстановления при любой фиксированной погрешности задания коэффициентов Фурье, а также найти наилучший метод восстановления. Мы называем этот метод регуляризацией по Колмогорову в силу того, что сама идея построения теории оптимального восстановления берет свое начало от идей А. Н. Колмогорова, связанных с построением оптимальных квадратурных формул и введением понятия n -поперечника. Ради объективности стоит сказать, что и этот подход может быть подвергнут некоторой критики, связанной с тем, что исследователь не знает, какому классу функций принадлежат функции, значения которых он хочет восстанавливать. Тем не менее, строя оптимальные методы для различных классов, мы получаем семейство методов, каждый из которых обладает хорошими свойствами (оптимальность на соответствующем классе). Среди этих методов исследователь может выбирать те, применение которых наиболее адекватно отображают изучаемые процессы.

Материал этого раздела взят из работы Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [64].

5.3. Задача оптимального восстановления линейного функционала в гильбертовом пространстве по неточно заданным значениям на ортонормированной системе функционалов рассматривалась в работе К. Ю. Осипенко [77]. Та же задача при задании погрешности в равномерной метрике с приложением к восстановлению по неточно заданным коэффициентам Фурье на различных классах функций изучалась в работе К. Ю. Осипенко [18]. Текст данного раздела взят из обзорной статьи К. Ю. Осипенко [20]. Случай $r = 1$ (класс $W_2^1(\mathbb{T})$) рассматривался в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [67].

5.4. Восстановление функций и их производных по неточно заданным коэффициентам Фурье (в комплексной форме) рассматривалось в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [54]. Более общие результаты в этом направлении можно найти в работах Н. Д. Виск, К. Ю. Осипенко [38] и К. Ю. Осипенко [87, теорема 10].

5.5. Для восстановления функций и их производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в комплексной форме аналогичный результат был получен в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [54]. Теорема 5.6 доказана в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [64]. Несколько более общая задача о восстановлении линейного оператора по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой в равномерной метрике, и применение ее к задаче восстановления решения волнового уравнения по неточным начальным условиям рассматривалась в работе Н. Д. Виск [37].

5.6. Теорема 5.7 является частным случаем несколько более общего результата (когда погрешность δ зависит от точки, в которой она измеряется), полученного в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [57]. В задаче (5.36) при $p = 2$ и $\sigma = \infty$ информация равносильна (в силу теоремы Планшереля) тому, что известна сама функция с точностью до δ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. В такой постановке задача решена в работе А. А. Melkman, С. А. Micchelli

[13]. Теоремы 5.8 и 5.9 (без нахождения семейства оптимальных методов) доказаны в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [57]. Существование семейств оптимальных методов восстановления было обнаружено в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [61]. В более общей ситуации семейства оптимальных методов восстановления описаны в работе К. Ю. Осипенко [87].

5.7. Идея совмещения двух подходов (одного, основанного на построении методов, точных на подпространствах, и другого, основанного на построении методов, оптимальных на данном классе) была высказана в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [68]. Теорема 5.11 является упрощенным вариантом доказанного в этой работе результата.

5.8. Первые точные неравенства типа (5.68) были получены в работах Е. Landau [11] ($T = \mathbb{R}_+$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$) и J. Hadamard [7] ($T = \mathbb{R}$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$). В конце тридцатых годов в работе А. Н. Колмогорова [44] были найдены точные константы в (5.68) при $T = \mathbb{R}$, $p = q = r = \infty$ в общем случае, т.е. при любых $n \geq 2$ и $0 < k < n$. Этот результат является наиболее ярким в данной проблематике, поэтому точные неравенства вида (5.68) часто называют неравенствами типа Колмогорова или (отдавая дань первому результату в этой области) неравенствами типа Ландау–Колмогорова.

Этой тематике посвящено довольно много работ. Но результаты, аналогичные по своей завершенности колмогоровскому, получены лишь еще в четырех случаях: в трех случаях на $\mathbb{R}$ ($p = q = r = 2$ — Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля [104], $p = q = r = 1$ — Е. М. Stein [29], $p = r = 2$, $q = \infty$ — Л. В. Тайков [97]) и в одном случае на $\mathbb{R}_+$ ($p = r = 2$, $q = \infty$ — В. Н. Габушин [40], Г. А. Калябин [43]). Более подробную информацию о точных неравенствах для производных можно найти в обзорных статьях В. В. Арестова [32] и Г. Г. Магарил-Ильяева, В. М. Тихомирова [70].

Теоремы 5.15 и 5.16 доказаны В. Н. Габушиным [39].

5.9. В работе Г. А. Калябина [43] был найден явный вид точной константы в неравенстве

$$x^{(k)}(0) \leq \hat{A}_{n,k} \left(\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2},$$

которое тесно связано с соответствующим мультипликативным неравенством типа Колмогорова. Несколько более общая задача была рассмотрена в работе А. А. Лунева, Л. Л. Оридороги [52]. Доказательство леммы 5.17 основано на результатах этой работы. Решение задачи оптимального восстановления (теорема 5.18) в существенном опирается на результаты работы К. Ю. Осипенко [22].

5.10. Решение экстремальной задачи в правой части неравенства (5.116) приведено в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, В. М. Тихомирова [70] в связи с обобщением неравенства Харди–Литтлвуда–Поля. Оценка сверху погрешности оптимального метода использует прием (применение неравенства Коши–Буняковского со специально подобранными весами), который уже неоднократно использовался (см., например, доказательство теоремы 5.9).

Оптимальное восстановление решений уравнений математической физики

6.1. Восстановление решения уравнения теплопроводности

Распространение тепла в $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$(6.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $u(\cdot, \cdot)$ — функция на $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$) с заданным начальным распределением температуры

$$(6.2) \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot).$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (6.1)–(6.2) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$(6.3) \quad u(x, t) = u(x, t; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi,$$

где $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$,

$$|x - \xi|^2 = \sum_{j=1}^d (x_j - \xi_j)^2.$$

Пусть в моменты времени $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(\cdot, t_1), \dots, u(\cdot, t_n)$. Точнее говоря, известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. По этой информации требуется восстановить распределение температуры в $\mathbb{R}^d$ в фиксированный момент времени τ , $t_1 \leq \tau \leq t_n$.

Тем самым рассматривается задача (2.36), в которой $X = Y_0 = Y_1 = \dots = Y_n = L_2(\mathbb{R}^d)$, $k = 0$, а операторы $I_j: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 0, 1, \dots, n$, определены равенствами

$$I_0 u_0(\cdot) = u(\cdot, \tau), \quad I_j u_0(\cdot) = u(\cdot, t_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

На двумерной плоскости (t, v) построим множество

$$M = \text{co}\{(t_j, \ln(1/\delta_j)), 1 \leq j \leq n\} + \{(t, 0) : t \geq 0\}.$$

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[t_1, +\infty)$ равенством

$$\theta(t) = \max\{v : (t, v) \in M\}.$$

Ясно, что на $[t_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим через $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т. е. $t_{s_1} = t_1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1, \dots, t_n\}$ (см. рисунок 6.1.1, на котором изображенные точки имеют координаты $(t_j, \ln(1/\delta_j))$, жирная кривая — график функции $\theta(\cdot)$).

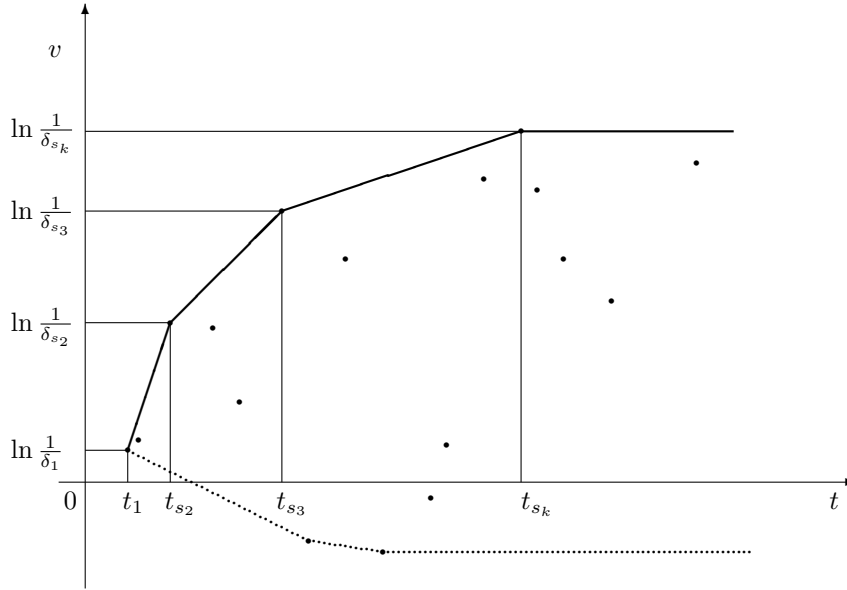


Рис. 6.1.1

ТЕОРЕМА 6.1. Для любого $\tau \geq t_1$ имеет место равенство

$$E(I, \delta) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Если $\tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$ при некотором m , $1 \leq m \leq k-1$, то для всех $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$(6.4) \quad e^{-2|\xi|^2\tau} \left(e^{2|\xi|^2t_{s_m}} \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1^{(m)}} + e^{2|\xi|^2t_{s_{m+1}}} \frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2^{(m)}} \right) \leq 1,$$

где

$$\lambda_1^{(m)} = \frac{t_{s_{m+1}} - \tau}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} \left(\frac{\delta_{s_{m+1}}}{\delta_{s_m}} \right)^{\frac{2(\tau - t_{s_m})}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}},$$

$$\lambda_2^{(m)} = \frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} \left(\frac{\delta_{s_m}}{\delta_{s_{m+1}}} \right)^{\frac{2(t_{s_{m+1}} - \tau)}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}},$$

методы

$$(6.5) \quad \hat{\varphi}(y)(\cdot) = F^{-1} \left(e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_m})} \alpha(\xi) F y_{s_m}(\xi) + e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) F y_{s_{m+1}}(\xi) \right) (\cdot)$$

являются оптимальными. Если $\tau = t_{s_m}$ при некотором m , $1 \leq m \leq k$, то метод

$$\hat{\varphi}(y)(\cdot) = y_{s_m}(\cdot)$$

является оптимальным. При $\tau > t_{s_k}$ метод

$$\hat{\varphi}(y)(\cdot) = F^{-1} \left(e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_k})} F y_{s_k}(\xi) \right) (\cdot)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 2.19. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(6.6) \quad \|I_0 u_0(\cdot)\|_{Y_0}^2 \rightarrow \max, \quad \|I_j u_0(\cdot)\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Хорошо известно (при $d = 1$ см., например, [45, стр. 408]), что

$$F(I_0 u_0(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2 \tau} F u_0(\xi), \quad F(I_j u_0(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2 t_j} F u_0(\xi), \\ j = 1, \dots, n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

По теореме Планшереля экстремальная задача (6.6) может быть записана в виде

$$(6.7) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F u_0(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F u_0(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Пусть $\tau \in [t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$ при некотором m , $1 \leq m \leq k-1$. Прямая $x = at + b$, где

$$a = \frac{\ln 1/\delta_{s_{m+1}} - \ln 1/\delta_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}, \quad b = \frac{t_{s_{m+1}} \ln 1/\delta_{s_m} - t_{s_m} \ln 1/\delta_{s_{m+1}}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}},$$

проходит через точки $(t_{s_m}, \ln 1/\delta_{s_m})$ и $(t_{s_{m+1}}, \ln 1/\delta_{s_{m+1}})$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим шар

$$B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \xi_\varepsilon| < \varepsilon\}, \quad \xi_\varepsilon = (\sqrt{a} + \varepsilon, 0, \dots, 0).$$

Пусть функция $\hat{u}_0(\cdot)$ такова, что

$$F\hat{u}_0(\xi) = \begin{cases} A, & \xi \in B_\varepsilon \cup (-B_\varepsilon), \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon \cup (-B_\varepsilon), \end{cases}$$

где

$$A = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{2|B_\varepsilon|}} \delta_{s_m}^{\frac{t_{s_{m+1}}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} - \frac{t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}},$$

а $|B_\varepsilon|$ — объем шара B_ε . Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t} |F\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{2A^2}{(2\pi)^d} \int_{B_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 t} d\xi \\ \leq \frac{2A^2|B_\varepsilon|}{(2\pi)^d} e^{-2at} = e^{-2(at+b)}.$$

В силу того, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная, $at_j + b \geq \ln 1/\delta_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq e^{-2(at_j+b)} \leq \delta_j^2.$$

Тем самым функция $\hat{u}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (6.7) и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{2A^2}{(2\pi)^d} \int_{B_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\xi \\ \geq \frac{2A^2|B_\varepsilon|}{(2\pi)^d} e^{-2(\sqrt{a}+2\varepsilon)^2 \tau} = e^{-2(a\tau+b)} e^{-2\varepsilon(4\sqrt{a}+\varepsilon)\tau}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|I_j u_0(\cdot)\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0 u_0(\cdot)\|_{Y_0}^2 &\geq e^{-2(a\tau+b)} = e^{-2\theta(\tau)} \\ &= \delta_{s_m}^{\frac{2(t_{s_{m+1}}-1-\tau)}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}} \delta_{s_{m+1}}^{\frac{2(\tau-t_{s_m})}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}} = \begin{cases} \lambda_1^{(m)} \delta_{s_m}^2 + \lambda_2^{(m)} \delta_{s_{m+1}}^2, & \tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}}), \\ \delta_{s_m}^2, & \tau = t_{s_m} \end{cases}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\tau \geq t_{s_k}$. Положим

$$\widehat{B}_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| < \varepsilon\}.$$

Определим функцию $\widehat{u}_0(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{u}_0(\xi) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{|\widehat{B}_\varepsilon|}} \delta_{s_k}, & \xi \in \widehat{B}_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \widehat{B}_\varepsilon, \end{cases}$$

где $|\widehat{B}_\varepsilon|$ — объем шара $\widehat{B}_\varepsilon$. Тогда для всех $t \geq 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{A^2}{(2\pi)^d} \int_{\widehat{B}_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 t} d\xi \leq \frac{A^2 |\widehat{B}_\varepsilon|}{(2\pi)^d} = \delta_{s_k}^2.$$

В силу определения множества M для всех $j = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_{s_k}^2 \leq \delta_j^2.$$

Следовательно, функция $\widehat{u}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (6.7), а

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta_{s_k}^2}{|\widehat{B}_\varepsilon|} \int_{\widehat{B}_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\xi \geq \delta_{s_k}^2 e^{-2\varepsilon^2 \tau}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$\sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|I_j u_0(\cdot)\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j=1, \dots, n}} \|I_0 u_0(\cdot)\|_{Y_0}^2 \geq \delta_{s_k}^2 = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Займемся теперь оценкой (2.63). Пусть $\tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$ при некотором m , $1 \leq m \leq k-1$. Определим операторы $S_j : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = m, m+1$, так, чтобы

$$\begin{aligned} F(S_m x(\cdot))(\xi) &= e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_m})} \alpha(\xi) Fx(\xi), \\ F(S_{m+1} x(\cdot))(\xi) &= e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) Fx(\xi). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для всех $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$

$$F((I_0 - S_m I_{s_m} - S_{m+1} I_{s_{m+1}}) u_0(\cdot))(\xi) \equiv 0.$$

Поэтому $I_0 = S_m I_{s_m} + S_{m+1} I_{s_{m+1}}$. По теореме Планшереля получаем

$$\begin{aligned} \|S_m z_m(\cdot) + S_{m+1} z_{m+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} \left| e^{|\xi|^2 t_{s_m}} \alpha(\xi) Fz_m(\xi) + e^{|\xi|^2 t_{s_{m+1}}} (1 - \alpha(\xi)) Fz_{m+1}(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\begin{aligned} e^{-2|\xi|^2 \tau} \left| e^{|\xi|^2 t_{s_m}} \alpha(\xi) Fz_m(\xi) + e^{|\xi|^2 t_{s_{m+1}}} (1 - \alpha(\xi)) Fz_{m+1}(\xi) \right|^2 \\ \leq \Omega(\xi) (\lambda_1^{(m)} |Fz_m(\xi)|^2 + \lambda_2^{(m)} |Fz_{m+1}(\xi)|^2), \end{aligned}$$

где

$$\Omega(\xi) = e^{-2|\xi|^2\tau} \left(e^{2|\xi|^2t_{s_m}} \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1^{(m)}} + e^{2|\xi|^2t_{s_{m+1}}} \frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_2^{(m)}} \right).$$

В силу условия (6.4) получаем

$$\begin{aligned} & \|S_m z_m(\cdot) + S_{m+1} z_{m+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda_1^{(m)} |F z_m(\xi)|^2 + \lambda_2^{(m)} |F z_{m+1}(\xi)|^2) d\xi \\ & = \lambda_1^{(m)} \|z_m(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_2^{(m)} \|z_{m+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.19 вытекает, что в рассматриваемом случае методы

$$\widehat{\varphi}(y) = S_m y_{s_m} + S_{m+1} y_{s_{m+1}}$$

являются оптимальными, а

$$E(I, \delta) = (\lambda_1^{(m)} \delta_{s_m}^2 + \lambda_2^{(m)} \delta_{s_{m+1}}^2)^{1/2} = e^{-\theta(\tau)}.$$

Из того, что

$$F\widehat{\varphi}(y)(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_m})} \alpha(\xi) F y_{s_m}(\xi) + e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) F y_{s_{m+1}}(\xi),$$

следует равенство (6.5).

Рассмотрим теперь случай, когда $\tau \geq t_{s_k}$. Определим оператор $S_k^0: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ так, чтобы

$$F(S_k^0 x(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_k})} F x(\xi).$$

Так как

$$F((I_0 - S_k^0 I_{s_k}) u_0(\cdot))(\xi) \equiv 0,$$

то $I_0 = S_k^0 I_{s_k}$. По теореме Планшереля получаем

$$\begin{aligned} \|S_k^0 z_k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2(\tau-t_{s_k})} |F z_k(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F z_k(\xi)|^2 d\xi = \|z_k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.19 вытекает, что в рассматриваемом случае метод

$$\widehat{\varphi}(y)(\cdot) = S_k^0 y_{s_k}(\cdot)$$

является оптимальным, а

$$E(I, \delta) = \delta_{s_k} = e^{-\theta(\tau)}.$$

При $\tau = t_{s_m}$, $1 \leq m \leq k-1$, аналогичные рассуждения проводятся для $S_m^0 z_m(\cdot) = z_m(\cdot)$.

Докажем, что множество функций $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условию (6.4) не пусто. Пусть $\tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$. Рассмотрим вогнутую функцию

$$(6.8) \quad y = x^{\frac{\tau-t_{s_m}}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}}, \quad x \geq 0.$$

Проведем касательную к графику этой функции в точке $x_0 > 0$. Нетрудно убедиться, что касательная будет иметь вид $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$, где

$$\lambda_1 = \frac{t_{s_{m+1}} - \tau}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} x_0^{\frac{\tau-t_{s_m}}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} x_0^{\frac{\tau-t_{s_m}}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}} - 1}.$$

В силу вогнутости кривой (6.8) для всех $x \geq 0$ будет выполняться неравенство

$$x^{\frac{\tau-t_{s_m}}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}} \leq \lambda_1 + \lambda_2 x.$$

Положим

$$x = e^{-|\xi|^2(t_{s_{m+1}}-t_{s_m})}, \quad x_0 = \left(\frac{\delta_{s_{m+1}}}{\delta_{s_m}} \right)^2.$$

Тогда $\lambda_j = \lambda_j^{(m)}$, $j = 1, 2$, и для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_m})} \leq \lambda_1^{(m)} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2(t_{s_{m+1}}-t_{s_m})}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{e^{-|\xi|^2\tau}}{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_{m+1}}}} \leq 1.$$

Положив

$$\alpha(\xi) = \frac{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}}}{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_{m+1}}}},$$

получаем

$$\begin{aligned} e^{-2|\xi|^2\tau} \left(e^{2|\xi|^2 t_{s_m}} \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1^{(m)}} + e^{2|\xi|^2 t_{s_{m+1}}} \frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2^{(m)}} \right) \\ = \frac{e^{-|\xi|^2\tau}}{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_{m+1}}}} \leq 1. \end{aligned}$$

□

6.2. Обобщенное уравнение теплопроводности на сфере

Положим

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}, \quad d \geq 2,$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$. Оператор Лапласа–Бельтрами Δ_S определяется для функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y \left(\frac{x}{|x|} \right) \Big|_{x=x'}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_k$ множество сферических гармоник порядка k (см. п. 9.3). Выберем в $\mathcal{H}_k$ ортонормированный базис $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $j = 1, \dots, a_k$,

$$a_k = (d+2k-2) \frac{(d+k-3)!}{(d-2)!k!}, \quad k \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = d.$$

Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$Y(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

а $\Lambda_k = k(k+d-2)$ — собственные значения оператора $-\Delta_S$.

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$

с начальным условием

$$u(\cdot, 0) = f(\cdot),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Если

$$(6.9) \quad f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

то решение этой задачи дается равенством (9.11)

$$u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Предположим, что приближенно известны решения рассматриваемой задачи при $t = 0, T$. Требуется восстановить решение в момент времени τ , $0 < \tau < T$. Тем самым мы приходим к задаче о нахождении величины

$$E(I, \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(I, \delta, \varphi),$$

где

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(\cdot, 0) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_1 \\ \|u(\cdot, T) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_2}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

и соответствующего оптимального метода.

ТЕОРЕМА 6.2. Если $\delta_1/\delta_2 \in [e^{\Lambda_m^{\alpha/2} T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}]$ при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$, то для всех α_{kj} , удовлетворяющих условию

$$\frac{\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} T}} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2} \leq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} (T-\tau)} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2} (T-\tau)}}{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2} T}},$$

$$\lambda_2 = \frac{e^{2\Lambda_m^{\alpha/2} (T-\tau)} e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T} - e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} (T-\tau)} e^{2\Lambda_m^{\alpha/2} T}}{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2} T}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \alpha_{kj} \right) y_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} y_{kj}^{(2)} \right) Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$y_s(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(s)} Y_j^{(k)}(\cdot), \quad s = 1, 2,$$

являются оптимальными, а

$$E(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$, то метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(1)} Y_j^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а $E(I, \delta) = \delta_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, имеющая разложение (6.9). Обозначим через $\{x_{kj}\}$ коэффициенты Фурье функции $u(\cdot, T)$. Тогда для коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ справедливо равенство

$$c_{kj} = e^{\Lambda_k^{\alpha/2} T} x_{kj},$$

а коэффициенты Фурье функции $u(\cdot, \tau)$ имеют вид

$$e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} x_{kj}.$$

Рассматриваемая задача эквивалентна дискретной задаче, о которой шла речь в теореме 2.20, при $p = 2$ и с операторами

$$I_0 x = \{e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} x_{kj}\}, \quad I_1 x = \{e^{\Lambda_k^{\alpha/2} T} x_{kj}\}, \quad I_2 x = \{x_{kj}\}.$$

При этом информационными операторами являются I_1 и I_2 . Таким образом, утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 2.20. $\square$

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени τ по неточно заданному решению в момент времени $T > \tau$ на классе

$$W = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_1\},$$

то из той же теоремы 2.20 будет следовать, что методы $\hat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$ будут оптимальными.

6.3. Обобщенное уравнение теплопроводности в шаре

Положим

$$\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}, \quad d \geq 2.$$

Рассмотрим задачу нахождения решения обобщенного уравнения теплопроводности в шаре $\mathbb{B}^d$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u &= 0, \quad \alpha > 0, \\ u|_{t=0} &= f(x), \\ u|_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} &= 0, \end{aligned}$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d)$, а оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определен равенством (9.24).

Если

$$(6.11) \quad f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(\cdot)$$

(функции $Y_{ksj}(\cdot)$ определены равенством (9.23)), то решение этой задачи дается равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-(\mu_s^{(p)})^{\alpha} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x),$$

где $\mu_s^{(p)}$ — положительные нули функции Бесселя $J_p(\cdot)$, $p = k + d/2 - 1$, занумерованные в порядке возрастания.

Как и в предыдущем пункте, предположим, что приближенно известны решения рассматриваемой задачи при $t = 0, T$. Требуется восстановить решение в момент времени τ , $0 < \tau < T$. Тем самым мы приходим к задаче о нахождении величины

$$E(I, \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{B}^d) \times L_2(\mathbb{B}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e(I, \delta, \varphi),$$

где

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d) \\ \|u(\cdot, 0) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_1 \\ \|u(\cdot, T) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_2}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)},$$

и соответствующего оптимального метода.

Упорядочим множество положительных нулей функций Бесселя $J_p(\cdot)$ при $p = k + d/2 - 1$, $k = 0, 1, \dots$, по возрастанию $\mu_{s_1}^{(p_1)} < \mu_{s_2}^{(p_2)} < \dots < \mu_{s_j}^{(p_j)} < \dots$ так, чтобы на интервалах $(0, \mu_{s_1}^{(p_1)})$, $(\mu_{s_j}^{(p_j)}, \mu_{s_{j+1}}^{(p_{j+1})})$, $j = 1, 2, \dots$, не было нулей из этого множества (о свойствах нулей функций Бесселя см. п. 9.10).

Положим

$$a_{ks} = e^{(\mu_s^{(p)})^\alpha} = e^{(\mu_s^{(k+d/2-1)})^\alpha}, \quad \beta_j = e^{(\mu_{s_j}^{(p_j)})^\alpha}.$$

ТЕОРЕМА 6.3. Если $\delta_1/\delta_2 \in [\beta_m^T, \beta_{m+1}^T]$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, то для всех α_{ksj} , удовлетворяющих условию

$$\frac{(a_{ks}^{T-\tau} - \alpha_{ksj})^2}{\lambda_1 a_{ks}^{2T}} + \frac{\alpha_{ksj}^2}{\lambda_2} \leq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\beta_{m+1}^{2(T-\tau)} - \beta_m^{2(T-\tau)}}{\beta_{m+1}^{2T} - \beta_m^{2T}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_m^{2(T-\tau)} \beta_{m+1}^{2T} - \beta_{m+1}^{2(T-\tau)} \beta_m^{2T}}{\beta_{m+1}^{2T} - \beta_m^{2T}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(a_{ks}^{-T} (a_{ks}^{T-\tau} - \alpha_{ksj}) y_{ksj}^{(1)} + \alpha_{ksj} y_{ksj}^{(2)} \right) Y_{ksj}(\cdot),$$

где

$$y_n(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{ksj}^{(n)} Y_{ksj}(\cdot), \quad n = 1, 2,$$

являются оптимальными, а

$$E(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0, \beta_1^T]$, то метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_{ks}^{-\tau} \sum_{j=1}^{a_k} y_{ksj}^{(1)} Y_{ksj}(\cdot)$$

является оптимальным, а $E(I, \delta) = \delta_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d)$, имеющая разложение (6.11). Обозначим через $\{x_{ksj}\}$ коэффициенты Фурье функции $u(\cdot, T)$. Тогда для коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ справедливо равенство

$$c_{ksj} = a_{ks}^T x_{ksj},$$

а коэффициенты Фурье функции $u(\cdot, \tau)$ имеют вид

$$a_{ks}^{T-\tau} x_{ksj}.$$

Рассматриваемая задача снова эквивалентна дискретной задаче, о которой шла речь в теореме 2.20, при $p = 2$ и с операторами

$$I_0 x = \{a_{ks}^{T-\tau} x_{ksj}\}, \quad I_1 x = \{a_{ks}^T x_{ksj}\}, \quad I_2 x = \{x_{ksj}\}.$$

При этом информационными операторами являются I_1 и I_2 . Таким образом, утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 2.20. $\square$

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени τ по неточно заданному решению в момент времени $T > \tau$ на классе

$$W = \{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_1 \},$$

то из той же теоремы 2.20 будет следовать, что методы $\hat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$ будут оптимальными.

6.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

Рассмотрим в шаре $\mathbb{B}^d$, $d \geq 2$, задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f(\cdot), \end{aligned}$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Граничное условие здесь понимается в смысле равенства

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rx') - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Решением этой задачи (см. п. 9.5) является функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

доопределенная в нуле по непрерывности, где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$, имеющей разложение (6.9).

Предположим, что приближенно известна граничная функция $f(\cdot)$ и приближенно известно решение на сфере радиуса $r < 1$. Как наилучшим образом по этой информации восстановить решение на сфере радиуса ρ , $r < \rho < 1$? Перейдем к более точной постановке. Положим

$$u_r(x') = u(rx'), \quad u_\rho(x') = u(\rho x'), \quad x' = \frac{x}{|x|}.$$

Речь идет о нахождении величины

$$E(I, \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(I, \delta, \varphi),$$

где

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|f(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_1 \\ \|u_r(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_2}} \|u_\rho(\cdot) - \varphi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

и соответствующего оптимального метода.

ТЕОРЕМА 6.4. Если $\delta_1/\delta_2 \in [r^{-m}, r^{-(m+1)}]$ при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$, то для всех α_{kj} , удовлетворяющих условию

$$\frac{(\rho^k - r^k \alpha_{kj})^2}{\lambda_1} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2} \leq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\rho^{2m}(\rho^2 - r^2)}{1 - r^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\rho^{2m}(\rho^2 - r^2)}{r^{2m}(1 - r^2)},$$

методы

$$\hat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left((\rho^k - r^k \alpha_{kj}) y_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} y_{kj}^{(2)} \right) Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$y_s(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(s)} Y_j^{(k)}(\cdot), \quad s = 1, 2,$$

являются оптимальными, а

$$E(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$, то метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(1)} Y_j^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а $E(I, \delta) = \delta_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, имеющая разложение (6.9). Обозначим через $\{x_{kj}\}$ коэффициенты Фурье функции $u_r(\cdot)$. Тогда для коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ справедливо равенство

$$c_{kj} = r^{-k} x_{kj},$$

а коэффициенты Фурье функции $u_\rho(\cdot)$ имеют вид $(\rho/r)^k x_{kj}$. Рассматриваемая задача эквивалентна дискретной задаче, о которой шла речь в теореме 2.20, при $p = 2$ и с операторами

$$I_0 x = \{(\rho/r)^k x_{kj}\}, \quad I_1 x = \{r^{-k} x_{kj}\}, \quad I_2 x = \{x_{kj}\}.$$

При этом информационными операторами являются I_1 и I_2 . Таким образом, утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 2.20. $\square$

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения на сфере радиуса ρ по неточно заданному решению на сфере радиуса r на классе

$$W = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_1\},$$

то из той же теоремы 2.20 будет следовать, что методы $\widehat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$ будут оптимальными.

6.5. Оптимальное восстановление решений разностных уравнений

Рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечном стержне, описываемый дискретной моделью, а именно, неявной разностной схемой

$$(6.13) \quad \frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2}.$$

Здесь τ и h — положительные числа, $(s, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$, $u_{s,j}$ — температура стержня в момент времени $s\tau$ в точке jh .

Обозначим через $l_{2,h}$ множество векторов $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, для которых

$$\|x\|_{l_{2,h}} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad h > 0.$$

Предположим, что приближенно измерена температура стержня в нулевой момент времени и в момент времени $n\tau$, т. е. приближенно известны векторы $u_0 = \{u_{0,j}\}$ и $u_n = \{u_{n,j}\}$, или, точнее говоря, нам известны векторы $y_1, y_2 \in l_{2,h}$ такие, что

$$\|u_0 - y_1\|_{l_{2,h}} \leq \delta_1, \quad \|u_n - y_2\|_{l_{2,h}} \leq \delta_2,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, 2$. По этой информации требуется восстановить вектор $u_m = \{u_{m,j}\}$, где $0 < m < n$, т. е. восстановить значение температуры стержня в момент времени $m\tau$.

Тем самым мы снова приходим к задаче (2.36), в которой $X = Y_0 = Y_1 = Y_2 = l_2$, $k = 0$, а операторы $I_j: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$, $j = 0, 1, 2$, определены равенствами

$$I_0 u_0 = u_m, \quad I_1 u_0 = u_0, \quad I_2 u_0 = u_n.$$

Таким образом, для данного метода восстановления $\varphi: l_{2,h} \times l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$ его погрешностью называется величина

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{u_0, y_1, y_2 \in l_{2,h} \\ \|u_0 - y_1\|_{l_{2,h}} \leq \delta_1 \\ \|u_n - y_2\|_{l_{2,h}} \leq \delta_2}} \|u_m - \varphi(y_1, y_2)\|_{l_{2,h}}.$$

Величина

$$E(I, \delta) = \inf_{\varphi: l_{2,h} \times l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}} e(I, \delta, \varphi)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}$ назовем функцию

$$Fx(\xi) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\xi}.$$

Несложно убедиться, что $Fx(\cdot) \in L_2([-\pi/h, \pi/h])$ и

$$(6.14) \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = 2\pi \|x\|_{l_{2,h}}^2.$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (6.13)

$$h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} e^{-ijh\xi} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2} e^{-ijh\xi}.$$

Отсюда

$$\frac{U_{s+1}(\xi) - U_s(\xi)}{\tau} = \frac{e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}}{h^2} U_{s+1}(\xi),$$

где

$$U_s(\xi) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{s,j} e^{-ijh\xi}.$$

Тем самым

$$U_{s+1}(\xi) = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{h\xi}{2}\right)^{-1} U_s(\xi).$$

Следовательно,

$$U_s(\xi) = \Lambda^s(\xi) U_0(\xi), \quad \Lambda(\xi) = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{h\xi}{2}\right)^{-1}.$$

Положим $a = (1 + 4\tau/h^2)^{-1}$,

$$\lambda_1 = \begin{cases} 0, & \delta_2/\delta_1 \in (0, a^n], \\ \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2m/n}, & \delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1), \\ 1, & \delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty), \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} a^{2(m-n)}, & \delta_2/\delta_1 \in (0, a^n], \\ \frac{m}{n} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2(m/n-1)}, & \delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1), \\ 0, & \delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty). \end{cases}.$$

ТЕОРЕМА 6.5. *Имеет место равенство*

$$E(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Для всех $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих при $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$ условию

$$(6.15) \quad \Lambda^{2m}(\xi) \left(\frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right) \leq 1,$$

а в остальных случаях равенству

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} 1, & \delta_2/\delta_1 \in (0, a^n], \\ 0, & \delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty), \end{cases}$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = F^{-1}(\Lambda^m(\cdot)(1 - \alpha(\cdot))Fy_1(\cdot) + \Lambda^{m-n}(\cdot)\alpha(\cdot)Fy_2(\cdot))$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \rightarrow \max, \quad \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2, \quad \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2.$$

Переходя к образам Фурье, получим следующую задачу

$$(6.16) \quad \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot)U_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \rightarrow \max, \quad \frac{1}{2\pi} \|U_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \leq \delta_1^2, \\ \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot)U_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \leq \delta_2^2.$$

Предположим, что $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$. Функция $\Lambda(\xi)$ при $\xi \in [0, \pi/h]$ монотонно убывает от 1 до a . Поэтому найдется $\widehat{\xi} \in (0, \pi/h)$ такое, что $\Lambda^n(\widehat{\xi}) = \delta_2/\delta_1$. Положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \delta_1, & \xi \in (\widehat{\xi}, \widehat{\xi} + \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (\widehat{\xi}, \widehat{\xi} + \varepsilon). \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_{\widehat{\xi}}^{\widehat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2n}(\xi) d\xi \leq \delta_1^2 \Lambda^{2n}(\widehat{\xi}) = \delta_2^2.$$

Тем самым функция $\widehat{U}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (6.16). Следовательно,

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_{\widehat{\xi}}^{\widehat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2m}(\xi) d\xi \\ = \delta_1^2 \Lambda^{2m}(c),$$

где $c \in [\widehat{\xi}, \widehat{\xi} + \varepsilon]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \delta_1^2 \Lambda^{2m}(\widehat{\xi}) = \delta_1^{2(1-m/n)} \delta_2^{2m/n} = \lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2.$$

Предположим, что $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$. Положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \frac{\delta_2}{\Lambda^n(\xi)}, & \xi \in (\pi/h - \varepsilon, \pi/h], \\ 0, & \xi \notin (\pi/h - \varepsilon, \pi/h]. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot) \widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \delta_2^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_2^2}{\varepsilon} \int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h} \Lambda^{-2n}(\xi) d\xi \leq \delta_2^2 a^{-2n} \leq \delta_1^2.$$

Тем самым функция $\widehat{U}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (6.16). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 &\geq \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot) \widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_2^2}{\varepsilon} \int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h} \Lambda^{2(m-n)}(\xi) d\xi \\ &= \delta_2^2 \Lambda^{2(m-n)}(c), \end{aligned}$$

где $c \in [\pi/h - \varepsilon, \pi/h]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \delta_2^2 a^{2(m-n)} = \lambda_2 \delta_2^2.$$

Если, наконец, $\delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty)$, положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \delta_1, & \xi \in (0, \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot) \widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Lambda^{2n}(\xi) d\xi \leq \delta_1^2 \leq \delta_2^2.$$

Таким образом, функция $\widehat{U}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (6.16). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 &\geq \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot) \widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Lambda^{2m}(\xi) d\xi \\ &= \delta_1^2 \Lambda^{2m}(c), \end{aligned}$$

где $c \in [0, \varepsilon]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \delta_1^2.$$

Займемся теперь оценкой (2.63). Пусть $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$. Определим операторы $S_j: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$, $j = 1, 2$, так, чтобы

$$\begin{aligned} F(S_1 u)(\cdot) &= \Lambda^m(\cdot)(1 - \alpha(\cdot))Fu(\cdot), \\ F(S_2 u)(\cdot) &= \Lambda^{m-n}(\cdot)\alpha(\cdot)Fu(\cdot). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для всех $u_0 \in l_{2,h}$

$$F((I_0 - S_1 I_1 - S_2 I_2)u)(\cdot) \equiv 0.$$

Поэтому $I_0 = S_1 I_1 + S_2 I_2$. В силу (6.14) получаем

$$\|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_{2,h}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2m}(\xi) \left| (1 - \alpha(\xi))Fz_1(\xi) + \Lambda^{-n}(\xi)\alpha(\xi)Fz_2(\xi) \right|^2 d\xi.$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\Lambda^{2m}(\xi) \left| (1 - \alpha(\xi))Fz_1(\xi) + \Lambda^{-n}(\xi)\alpha(\xi)Fz_2(\xi) \right|^2 \leq \Omega(\xi)(\lambda_1 |Fz_1(\xi)|^2 + \lambda_2 |Fz_2(\xi)|^2),$$

где

$$\Omega(\xi) = \Lambda^{2m}(\xi) \left(\frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right).$$

В силу условия (6.15) получаем

$$\begin{aligned} \|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_{2,h}}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (\lambda_1 |Fz_1(\xi)|^2 + \lambda_2 |Fz_2(\xi)|^2) d\xi \\ &= \lambda_1 \|z_1\|_{l_{2,h}}^2 + \lambda_2 \|z_2\|_{l_{2,h}}^2. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.19 вытекает, что в рассматриваемом случае методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_1 y_1 + S_2 y_2$$

являются оптимальными, а

$$E(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$. Определим оператор $S_2: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$ так, чтобы

$$F(S_2 u)(\cdot) = \Lambda^{m-n}(\cdot)Fu(\cdot).$$

Так как

$$F((I_0 - S_2 I_2)u_0)(\xi) \equiv 0,$$

то $I_0 = S_2 I_2$. Кроме того,

$$\|S_2 z_2\|_{l_{2,h}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2(m-n)}(\xi) |Fz_2(\xi)|^2 d\xi \leq a^{2(m-n)} \|z_2\|_{l_{2,h}}^2.$$

Из теоремы 2.19 вытекает, что в рассматриваемом случае метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_2 y_2$$

является оптимальным, а

$$E(I, \delta) = a^{m-n} \delta_2.$$

Наконец, если $\delta_2 \geq \delta_1$, определим оператор $S_1: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$ так, чтобы

$$F(S_1 u)(\cdot) = \Lambda^m(\cdot)Fu(\cdot).$$

Тогда $I_0 = S_1 I_1$ и

$$\|S_1 z_1\|_{l_{2,h}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2m}(\xi) |Fz_1(\xi)|^2 d\xi \leq \|z_1\|_{l_{2,h}}^2.$$

Из теоремы 2.19 следует, что метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_1 y_1$$

является оптимальным, а

$$E(I, \delta) = \delta_1.$$

Докажем, что при $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$ множество функций $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условию (6.15) не пусто. Рассмотрим вогнутую функцию

$$(6.17) \quad y = x^{m/n}, \quad x \geq 0.$$

Проведем касательную к графику этой функции в точке $x_0 > 0$. Нетрудно убедиться, что касательная будет иметь вид $y = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 x$, где

$$\hat{\lambda}_1 = \left(1 - \frac{m}{n}\right) x_0^{m/n}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{m}{n} x_0^{m/n-1}.$$

В силу вогнутости кривой (6.17) для всех $x \geq 0$ будет выполняться неравенство

$$x^{m/n} \leq \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 x.$$

Положим

$$x = \Lambda^{2n}(\xi), \quad x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2.$$

Тогда $\hat{\lambda}_j = \lambda_j$, $j = 1, 2$, и для всех $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ выполняется неравенство

$$\Lambda^{2m}(\xi) \leq \lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)} \leq 1.$$

Положив

$$\alpha(\xi) = \frac{\lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)},$$

получаем

$$\Lambda^{2m}(\xi) \left(\frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right) = \frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)} \leq 1.$$

□

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени $m\tau$ по неточно заданному решению в момент времени $n\tau$ на классе

$$W = \{u_0 \in l_{2,h} : \|u_0\|_{l_{2,h}} \leq \delta_1\},$$

то из той же теоремы 2.19 будет следовать, что методы $\hat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$ будут оптимальными.

Заметим, что результат, полученный в теореме 6.1 для $t_1 = 0$, $t_2 = T$ ($n = 2$) и промежуточной точки τ_0 , в которой требуется восстановить распределение температуры, в одномерном случае совпадает с предельным значением погрешности восстановления и метода из теоремы 6.5 при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ (в этом случае надо положить $a = 0$).

Для процесса распространения тепла в бесконечном стержне, описываемого дискретной моделью можно было бы получить более общий результат, аналогичный тому, который был получен в п. 6.1, но мы ограничились более простой задачей, из решения которой видно, что общий случай может быть рассмотрен с помощью аналогичных рассуждений.

6.6. Комментарии

6.1. Применение теории оптимального восстановления линейных операторов по неточно заданной информации к решению уравнений математической физики началось с работ Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомирова [12] и К. Ю. Осипенко [85]. Теорема 6.1 (без нахождения семейства оптимальных методов) была доказана в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [60].

6.2. Задачи об оптимальном восстановлении значений оператора $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ по неточно заданным коэффициентам Фурье на обобщенных соболевских классах рассматривались в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [54].

6.3. Оптимальный метод восстановления решения обобщенного уравнения теплопроводности в шаре (6.10) (без нахождения семейства оптимальных методов) был получен в работе Е. В. Введенской, К. Ю. Осипенко [26].

6.4. Теорема 6.4 (без нахождения семейства оптимальных методов) была доказана в работе Е. А. Баловой [34]. Ряд других постановок задач о восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным можно найти в работах К. Ю. Осипенко [85] и Е. А. Баловой, К. Ю. Осипенко [35].

6.5. Задача об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений рассматривалась в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [65], где рассматривался процесс распространения тепла на окружности.

Дополнение I

7.1. Равномерное наилучшее приближение

7.1.1. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве. Пусть X — линейное нормированное пространство и Y — некоторое множество из X . Для фиксированного элемента $x \in X$ рассмотрим задачу о нахождении величины

$$E(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X,$$

называемой *наилучшим приближением элемента x множеством Y* . Если существует $\hat{y} \in Y$, для которого

$$\|x - \hat{y}\|_X = E(x, Y),$$

то $\hat{y}$ называется *элементом наилучшего приближения*.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть X — линейное нормированное пространство, а Y — конечномерное линейное подпространство X . Тогда для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — произвольный элемент из X . По определению нижней грани найдется последовательность $\{y_n\}$, для которой

$$\|x - y_n\|_X < E(x, Y) + \frac{1}{n}.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|y_n\|_X \leq \|y_n - x\|_X + \|x\|_X \leq E(x, Y) + 1 + \|x\|_X.$$

Тем самым последовательность $\{y_n\}$ ограничена, а, значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_k} \rightarrow \hat{y} \in Y$. Имеем

$$E(x, Y) \leq \|x - \hat{y}\|_X \leq \|x - y_{n_k}\|_X + \|y_{n_k} - \hat{y}\|_X \leq E(x, Y) + \frac{1}{n_k} + \|y_{n_k} - \hat{y}\|_X.$$

Устремляя k к бесконечности, получаем

$$\|x - \hat{y}\|_X = E(x, Y).$$

□

Множество Y из линейного нормированного пространства X , обладающее тем свойством, что для любого $x \in X$ существует единственный элемент наилучшего приближения из Y , называется *чебышевским* множеством. Пусть Y — чебышевское множество в линейном нормированном пространстве X . *Оператором наилучшего приближения* называется оператор $P: X \rightarrow Y$, сопоставляющий каждому $x \in X$ элемент наилучшего приближения, т. е. определенный равенством

$$\|x - Px\|_X = E(x, Y).$$

ТЕОРЕМА 7.2. Если Y — конечномерное подпространство линейного нормированного пространства X , являющееся чебышевским множеством, то оператор наилучшего приближения непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in X$. Тогда для любого $y \in Y$

$$E(a, Y) \leq \|a - y\|_X \leq \|a - b\|_X + \|b - y\|_X.$$

Следовательно,

$$E(a, Y) \leq \|a - b\|_X + E(b, Y).$$

Отсюда вытекает, что для любых $a, b \in X$

$$(7.1) \quad |E(a, Y) - E(b, Y)| \leq \|a - b\|_X.$$

Пусть $x_n \rightarrow \hat{x}$. Положим $y_n = Px_n$, $\hat{y} = P\hat{x}$ и докажем, что $y_n \rightarrow \hat{y}$. Из (7.1) следует, что

$$|E(x_n, Y) - E(\hat{x}, Y)| \leq \|x_n - \hat{x}\|_X.$$

Тем самым последовательность $\{E(x_n, Y)\}$ сходящаяся. Тогда из того, что

$$\|y_n\|_X \leq \|y_n - x_n\|_X + \|x_n\|_X = E(x_n, Y) + \|x_n\|_X,$$

вытекает ограниченность последовательности $\{y_n\}$. Если предположить, что $y_n \not\rightarrow \hat{y}$, то найдется подпоследовательность $y_{n_k} \rightarrow y_0 \neq \hat{y}$. Имеем

$$\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_X = E(x_{n_k}, Y) \leq \|x_{n_k} - \hat{y}\|_X.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\|\hat{x} - y_0\|_X \leq \|\hat{x} - \hat{y}\|_X,$$

что противоречит тому, что Y — чебышевское множество. $\square$

7.1.2. Наилучшее равномерное приближение многочленами. Теорема Чебышева. Обозначим через $C([a, b])$ линейное пространство функций $x(\cdot)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Через $\mathcal{P}_n$ будем обозначать множество алгебраических многочленов степени не выше n . Рассмотрим задачу наилучшего приближения функции $x(\cdot) \in C([a, b])$ алгебраическими многочленами из $\mathcal{P}_n$, т. е. задачу о нахождении величины

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) = \inf_{p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n} \|x(\cdot) - p_n(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

В силу теоремы 7.1 существует многочлен $\hat{p}(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ такой, что

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) = \|x(\cdot) - \hat{p}_n(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

Многочлен $\hat{p}(\cdot)$ называется *многочленом наилучшего равномерного приближения* для $x(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 7.3 (Валле-Пуссен). *Предположим, что существуют $n+2$ точки $a \leq t_1 < \dots < t_{n+2} \leq b$, в которых для некоторого $p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ выполняются равенства*

$$\text{sign}(x(t_j) - p_n(t_j)) = \sigma(-1)^j, \quad j = 1, \dots, n+2,$$

где $\sigma = 1$ или -1 . Тогда

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) \geq \min_{1 \leq j \leq n+2} |x(t_j) - p_n(t_j)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для многочлена наилучшего приближения $\hat{p}_n(\cdot)$

$$\|x(\cdot) - \hat{p}_n(\cdot)\|_{C([a, b])} < \min_{1 \leq j \leq n+2} |x(t_j) - p_n(t_j)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{sign}(\hat{p}_n(t_j) - p_n(t_j)) &= \text{sign}(\hat{p}_n(t_j) - x(t_j) + x(t_j) - p_n(t_j)) \\ &= \text{sign}(x(t_j) - p_n(t_j)) = \sigma(-1)^j, \quad j = 1, \dots, n+2. \end{aligned}$$

Тем самым многочлен $\hat{p}_n(\cdot) - p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ меняет знак не менее $(n+1)$ -го раза, что невозможно, т. к. многочлены из $\mathcal{P}_n$, отличные от тождественного нуля, не могут иметь более n нулей. $\square$

ТЕОРЕМА 7.4 (Чебышев). *Многочлен $\hat{p}_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего равномерного приближения для функции $x(\cdot) \in C([a, b])$ в том и только в том случае, когда существуют $n+2$ точки $a \leq t_1 < \dots < t_{n+2} \leq b$ такие, что*

$$x(t_j) - \hat{p}_n(t_j) = \sigma(-1)^j \|x(\cdot) - \hat{p}_n(\cdot)\|_{C([a, b])}, \quad j = 1, \dots, n+2,$$

где $\sigma = 1$ или -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\hat{p}_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ — многочлен наилучшего равномерного приближения для функции $x(\cdot) \in C([a, b])$. Обозначим через t_1 минимальную из точек отрезка $[a, b]$, в которых

$$|x(t) - \hat{p}_n(t)| = E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Пусть для определенности $x(t_1) - \hat{p}_n(t_1) = E(x(\cdot), \mathcal{P}_n)$. Через t_2 обозначим минимальную из точек отрезка $[t_1, b]$, в которых

$$x(t) - \hat{p}_n(t) = -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Продолжая этот процесс, получим точки $a \leq t_1 < \dots < t_m \leq b$, в которых

$$x(t_j) - \hat{p}_n(t_j) = (-1)^{j+1} E(x(\cdot), \mathcal{P}_n), \quad j = 1, \dots, m.$$

Предположим, что $m < n+2$. В силу непрерывности функции $x(\cdot) - \hat{p}_n(\cdot)$ на каждом из интервалов (t_j, t_{j+1}) , $j = 1, \dots, m-1$, найдется точка s_j , в которой $x(s_j) - \hat{p}_n(s_j) = 0$. Положим $s_0 = a$ и $s_m = b$. Тогда из построения точек t_j вытекает, что на каждом из отрезков $[s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, выполняются неравенства

$$-E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) < (x(t) - \hat{p}_n(t))(-1)^j \leq E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $t \in [s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$-E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) + \varepsilon < (x(t) - \hat{p}_n(t))(-1)^j \leq E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Положим

$$q(t) = \lambda \prod_{j=1}^{m-1} (s_j - t) \in \mathcal{P}_n,$$

где $\lambda > 0$ выберем так, чтобы

$$\|q(\cdot)\|_{C([a, b])} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $t \in (s_j, s_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, имеем

$$(x(t) - \hat{p}_n(t) - q(t))(-1)^j \leq E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) - q(t)(-1)^j < E(x(\cdot), \mathcal{P}_n)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} (x(t) - \hat{p}_n(t) - q(t))(-1)^j &\geq -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) + \varepsilon - q(t)(-1)^j \\ &\geq -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) + \frac{\varepsilon}{2} > -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n). \end{aligned}$$

Тем самым для многочлена $r_n(\cdot) = \hat{p}_n(\cdot) + q(\cdot) \in \mathcal{P}_n$

$$\|x(\cdot) - r_n(\cdot)\|_{C([a, b])} < E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Полученное противоречие доказывает, что $m \geq n+2$.

Достаточность. Из теоремы 7.3 вытекает, что

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) \geq \|x(\cdot) - \hat{p}_n(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

Следовательно, $\hat{p}_n(\cdot)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения. $\square$

7.1.3. Многочлены Чебышева. Многочлен Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ определяется равенством

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

Из тождества

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi \cos n\varphi,$$

полагая $\varphi = \arccos t$, получаем

$$(7.2) \quad T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $T_0(t) \equiv 1$, а $T_1(t) = \cos \arccos t = t$, то из равенства (7.2) вытекает, что $T_n(\cdot)$ — действительно многочлен степени n , при этом нетрудно убедиться, что у него коэффициент при старшей степени равен 2^{n-1} .

Отметим ряд важных свойств многочленов Чебышева. У $T_n(\cdot)$ имеется n различных вещественных корней

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из определения $T_n(\cdot)$ следует, что

$$|T_n(t)| \leq 1, \quad t \in [-1, 1].$$

На отрезке $[-1, 1]$ имеется $n+1$ точка

$$s_j = \cos \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

в которых $|T_n(\cdot)|$ принимает максимальные значения

$$(7.3) \quad T_n(s_j) = (-1)^j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Среди всех алгебраических многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, найти тот, для которого максимальное значение его модуля на отрезке $[-1, 1]$ было бы наименьшим. Эту задачу можно сформулировать как задачу наилучшего равномерного приближения функции t^n многочленами степени не выше $n-1$, т. е. задачу о нахождении величины $E(t^n, \mathcal{P}_{n-1})$. Из теоремы 7.4 и равенств (7.3) получаем, что решением поставленной задачи является многочлен

$$\bar{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t).$$

А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 7.5. При всех $n \in \mathbb{N}$

$$E(t^n, \mathcal{P}_{n-1}) = \|\bar{T}_n(\cdot)\|_{C([-1,1])} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

7.2. Теорема Хана–Банаха для однородно-выпуклого функционала с бесконечными значениями

Неотрицательный функционал $p(\cdot)$ на вещественном (комплексном) линейном пространстве назовем *однородно-выпуклым*, если для всех $x, y \in X$ и всех вещественных (комплексных) чисел λ

$$(7.4) \quad \begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y), \\ p(\lambda x) &= |\lambda|p(x). \end{aligned}$$

Однородно-выпуклый функционал, вообще говоря, может принимать и бесконечные значения.

Пусть W — выпуклое уравновешенное множество в линейном пространстве X . Тогда функционал

$$p_W(x) = \inf\{t > 0 : x \in tW\}$$

называется *функционалом Минковского* множества W . Если не существует таких $t > 0$, при которых $x \in tW$, то считается, что $p_W(x) = +\infty$.

Докажем, что функционал Минковского $p_W(\cdot)$ является однородно-выпуклым. Пусть $y = \lambda x$, где $\lambda \neq 0$ — вещественное или комплексное число (в зависимости от того, над каким полем рассматривается линейное пространство X). Тогда

$$p_W(y) = \inf\{t > 0 : \lambda x \in tW\} = \inf\{|\lambda|r > 0 : x \in rW\} = |\lambda|p_W(x).$$

Пусть теперь $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Будем считать, что $p_W(x) < +\infty$ и $p_W(y) < +\infty$ (в противном случае неравенство (7.4) очевидным образом выполняется). Выберем t и s так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} p_W(x) &< t < p_W(x) + \varepsilon, \\ p_W(y) &< s < p_W(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда $x \in tW$ и $y \in sW$. Положим $r = t + s$. Имеем

$$\frac{x+y}{r} = \frac{t}{r} \frac{x}{t} + \frac{s}{r} \frac{y}{s}.$$

Тем самым элемент $(x+y)/r$ принадлежит отрезку с концами x/t и y/s , а, следовательно, и множеству W . Отсюда

$$p_W(x+y) \leq r = t + s < p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$p_W(x+y) \leq p_W(x) + p_W(y).$$

Пусть X — линейное пространство и X_0 — некоторое его подпространство. Предположим, что на X_0 задан линейный функционал x'_0 . Линейный функционал x' , определенный на всем пространстве X , называется *продолжением функционала x'_0* , если

$$\langle x', x \rangle = \langle x'_0, x \rangle$$

для всех $x \in X_0$.

ТЕОРЕМА 7.6 (Хан-Банах). Пусть $p(\cdot)$ — однородно-выпуклый функционал (не обязательно конечный), определенный на линейном пространстве X , и пусть X_0 — линейное подпространство X . Если x' — линейный функционал на X_0 , удовлетворяющий при всех $x \in X_0$ условию

$$(7.5) \quad |\langle x'_0, x \rangle| \leq p(x),$$

то x'_0 может быть продолжен до линейного функционала x' на X , для которого сохраняется условие подчинения (7.5) на всем X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала теорему для вещественного случая. Покажем, что при $X_0 \neq X$ функционал x'_0 можно продолжить с X_0 на некоторое большее подпространство X_1 с сохранением условия (7.5). Действительно, пусть z — произвольный элемент из X , не принадлежащий X_0 . Обозначим через X_1 линейное подпространство элементов, имеющих вид $x + tz$, где $x \in X_0$, а $t \in \mathbb{R}$. Положим

$$\langle x', x + tz \rangle = \langle x'_0, x \rangle + tc,$$

а число c подберем так, чтобы сохранить условие (7.5), т.е. так, чтобы при всех $x \in X_0$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство

$$|\langle x'_0, x \rangle + tc| \leq p(x + tz).$$

При $t \neq 0$ это неравенство можно записать в виде

$$-p\left(\frac{x}{t} + z\right) - \left\langle x'_0, \frac{x}{t} \right\rangle \leq c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) - \left\langle x'_0, \frac{x}{t} \right\rangle.$$

Покажем, что всегда существует c , удовлетворяющее этим условиям. Пусть x_1 и x_2 — произвольные элементы из X_0 . Тогда из того, что

$$\langle x'_0, x_2 \rangle - \langle x'_0, x_1 \rangle \leq p(x_2 - x_1) = p((x_2 + z) - (x_1 + z)) \leq p(x_2 + z) + p(x_1 + z),$$

имеем

$$(7.6) \quad -p(x_1 + z) - \langle x'_0, x_1 \rangle \leq p(x_2 + z) - \langle x'_0, x_2 \rangle.$$

Положим

$$c_1 = \sup_{x_1 \in X_0} (-p(x_1 + z) - \langle x'_0, x_1 \rangle), \quad c_2 = \inf_{x_2 \in X_0} (p(x_2 + z) - \langle x'_0, x_2 \rangle).$$

Из (7.6) вытекает, что $c_1 \leq c_2$. Если существует $x \in X_0$, для которого $p(x + z) < +\infty$, то $c_1 > -\infty$ и $c_2 < +\infty$, а значит, найдется $c \in \mathbb{R}$, для которого

$$(7.7) \quad c_1 \leq c \leq c_2.$$

Если же $p(x + z) = +\infty$ для всех $x \in X_0$, то $c_1 = -\infty$, а $c_2 = +\infty$ и существование c , удовлетворяющего равенству (7.7) очевидно.

Тем самым доказано, что функционал x'_0 можно продолжить с сохранением условия (7.5) на некоторое большее подпространство X_1 . Совокупность всевозможных продолжений функционала x'_0 , удовлетворяющих условию (7.5), частично упорядочена, и каждое ее линейно упорядоченное подмножество обладает верхней гранью: этой верхней гранью является функционал, определенный на объединении областей определения функционалов из этого подмножества и совпадающий с каждым таким функционалом на его области определения. В силу леммы Цорна во всем множестве всевозможных продолжений существует максимальный элемент. Этот максимальный элемент и представляет собой искомый функционал.

Докажем теперь утверждение теоремы для комплексного случая. Обозначим через $X_{\mathbb{R}}$ и $X_{0\mathbb{R}}$ пространства X и X_0 , рассматриваемые как вещественные линейные пространства. Определим вещественный линейный функционал $x'_{0\mathbb{R}}$ на $X_{0\mathbb{R}}$ равенством

$$\langle x'_{0\mathbb{R}}, x \rangle = \operatorname{Re} \langle x'_0, x \rangle.$$

По доказанному существует продолжение этого функционала $x'_{\mathbb{R}}$ на все $X_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющее условию

$$(7.8) \quad |\langle x'_{\mathbb{R}}, x \rangle| \leq p(x).$$

Положим

$$\langle x', x \rangle = \langle x'_{\mathbb{R}}, x \rangle - i \langle x'_{\mathbb{R}}, ix \rangle.$$

Нетрудно убедиться, что x' — линейный функционал на X , причем при $x \in X_0$

$$\langle x', x \rangle = \operatorname{Re} \langle x'_0, x \rangle - i \operatorname{Re} \langle x'_0, ix \rangle = \langle x'_0, x \rangle.$$

Предположим, что найдется $x_0 \in X$, для которого $|\langle x', x_0 \rangle| > p(x_0)$. Пусть $\langle x', x_0 \rangle = |\langle x', x_0 \rangle| e^{i\varphi}$. Положим $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$. Тогда

$$\langle x'_{\mathbb{R}}, y_0 \rangle = \operatorname{Re} \langle x', y_0 \rangle = \operatorname{Re} e^{-i\varphi} \langle x', x_0 \rangle = |\langle x', x_0 \rangle| > p(x_0),$$

что противоречит (7.8). □

7.3. Наилучшие приближения в линейных пространствах с полускалярным произведением

Говорят, что в линейном пространстве E задано *полускалярное произведение* $(\cdot, \cdot)_E$, если каждой паре элементов $x, y \in E$ сопоставлено число (вещественное или комплексное в зависимости от того, на каком поле рассматривается пространство E) $(x, y)_E$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $(x, x)_E \geq 0$,
- 2) $(x, y)_E = \overline{(y, x)_E}$,
- 3) $(\alpha x + \beta y, z)_E = \alpha(x, z)_E + \beta(y, z)_E, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (или } \mathbb{R}\text{)}.$

Отличие полускалярного произведения от скалярного состоит в том, что для полускалярного произведения из того, что $(x, x)_E = 0$, вообще говоря, не следует, что $x = 0$.

В линейном пространстве E с полускалярным произведением $(x, y)_E$ можно ввести полунорму равенством

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)_E}.$$

Пусть E — линейное пространство с полускалярным произведением $(x, y)_E$, L — линейное подпространство E и $y \in E$. Рассмотрим задачу о нахождении элемента наилучшего приближения к y из подпространства L :

$$(7.9) \quad \|x - y\|_E \rightarrow \min, \quad x \in L.$$

ТЕОРЕМА 7.7. Если $\hat{x}$ — решение задачи (7.9), то для всех $x \in L$

$$(\hat{x} - y, x)_E = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $x_0 \in L$

$$(\hat{x} - y, x_0)_E = \alpha \neq 0.$$

Положим $z = \hat{x} - \lambda x_0$, где $\lambda = \bar{\alpha} / \|x_0\|_E^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \|z - y\|_E^2 &= \|\hat{x} - \lambda x_0 - y\|_E^2 = \|\hat{x} - y\|_E^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \alpha) + |\lambda|^2 \|x_0\|_E^2 \\ &= \|\hat{x} - y\|_E^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|x_0\|_E^2} < \|\hat{x} - y\|_E^2, \end{aligned}$$

что противоречит тому, что $\hat{x}$ — решение задачи (7.9). $\square$

7.4. Теорема Борсука

7.4.1. Симплексы в $\mathbb{R}^n$ и триангуляция $\mathbb{S}^n$. Точки $p_0, p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}^n$ называются *аффинно-независимыми*, если не существует $(s-1)$ -мерной гиперплоскости, содержащей эти точки. Пусть $p_0, p_1, \dots, p_s$ — аффинно-независимые точки из $\mathbb{R}^n$. Тогда выпуклая оболочка этих точек

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=0}^s \lambda_j p_j, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \sum_{j=0}^s \lambda_j = 1 \right\}$$

называется *s-симплексом* с вершинами $p_0, p_1, \dots, p_s$ и обозначается через $[p_0, p_1, \dots, p_s]$. Будем также обозначать симплексы через σ и σ^s , где верхний индекс обозначает размерность симплекса. Симплекс с $k+1$ вершиной из множества $p_0, p_1, \dots, p_s$ называется *k-гранью* σ^s . При $k=1$ *k-грань* — это отрезок $[p_i, p_j]$, называемый *ребром* σ^s . В силу выпуклости симплекса σ^s его диаметр $\delta(\sigma^s)$ равен длине максимального ребра.

Стандартным s-симплексом в $\mathbb{R}^{s+1}$ называется *s-симплекс* с вершинами $e_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_s = (0, 0, \dots, 1)$.

Введем в $\mathbb{R}^n$ норму

$$\|x\| = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Через $\mathbb{B}^n$ будем обозначать единичный шар в $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

а через $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичную сферу

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Верхней полусферой будем называть множество

$$\mathbb{S}_+^n = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \geq 0\},$$

а *нижней полусферой* — множество

$$\mathbb{S}_-^n = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \leq 0\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}_+^n \cup \mathbb{S}_-^n$, а $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n$.

Конечное семейство симплексов $\mathcal{S}^n = \{\sigma\}$ из $\mathbb{S}^n$ называется *триангуляцией* $\mathbb{S}^n$, если

- 1) пересечение любых двух симплексов из $\mathcal{S}^n$ либо пусто, либо является общей гранью каждого;
- 2) если $\sigma \in \mathcal{S}^n$, то каждая грань σ принадлежит $\mathcal{S}^n$;
- 3) $\mathbb{S}^n = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}^n} \sigma$;

Из свойств 1)–3) вытекает, что каждый $(n-1)$ -симплекс из $\mathcal{S}^n$ является общей гранью в точности двух n -симплексов из $\mathcal{S}^n$.

Множество всех n -симплексов $[\pm e_1, \dots, \pm e_{n+1}]$ и всех их граней называется *базисной триангуляцией* $\mathbb{S}^n$ и обозначается через Σ^n . Каждый симплекс из Σ^n имеет единственное представление в виде $[\pm e_{i_0}, \dots, \pm e_{i_s}]$, где $i_0 < \dots < i_s$, называемой *стандартной формой*.

Отображение $\alpha: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, определяемое равенством $\alpha(x) = -x$ называется *симметричным*. Триангуляцию $\mathcal{S}^n$ сферы $\mathbb{S}^n$ будем называть *симметричной*, если для всех $k \leq n$ и всех симплексов $\sigma^k \in \mathcal{S}^n$ множество $\alpha(\sigma^k)$ — также k -симплекс из $\mathcal{S}^n$.

Очевидно, что Σ^n является симметричной триангуляцией. Кроме того, существует симметричная триангуляция $\mathbb{S}^n$ со сколь угодно малыми симплексами. Формальное доказательство этого простого геометрического факта основывается на том, что симметричная триангуляция $\mathbb{S}^n = \partial \mathbb{S}_+^{n+1}$ с малыми симплексами может быть продолжена на разбиение с малыми симплексами $\mathbb{S}_+^{n+1}$. Тогда множество

$$\{\sigma^{n+1}, \alpha(\sigma^{n+1}) : \sigma^{n+1} \in \mathbb{S}_+^{n+1}\}$$

будет являться симметричной триангуляцией $\mathbb{S}^{n+1}$.

7.4.2. Комбинаторная лемма. Пусть $\mathcal{S}^k$ и $\mathcal{S}^n$ — триангуляции $\mathbb{S}^k$ и $\mathbb{S}^n$, соответственно. Отображение вершин из $\mathcal{S}^k$ в вершины $\mathcal{S}^n$ называется *симплициальным*, если для каждого симплекса $[p_0, \dots, p_s]$ из $\mathcal{S}^k$ точки $f(p_0), \dots, f(p_s)$ являются вершинами некоторого симплекса из $\mathcal{S}^n$ (быть может, меньшей размерности). Пусть $\mathcal{S}^k$ — произвольная триангуляция $\mathbb{S}^k$ и $f: \mathcal{S}^k \rightarrow \mathcal{S}^n$ — симплициальное отображение. Симплекс $[p_0, \dots, p_r]$ из $\mathcal{S}^k$ называется *положительным*, если вершины $f(p_0), \dots, f(p_r)$ образуют r -симплекс $\sigma^r \in \Sigma^n$, стандартная форма которого имеет вид

$$\sigma^r = [e_{i_0}, -e_{i_1}, \dots, (-1)^r e_{i_r}].$$

Симплекс $[p_0, \dots, p_r]$ из $\mathcal{S}^k$ называется *отрицательным*, если вершины $f(p_0), \dots, f(p_r)$ образуют r -симплекс $\sigma^r \in \Sigma^n$, стандартная форма которого имеет вид

$$\sigma^r = [-e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, (-1)^{r+1} e_{i_r}].$$

Симплекс $[p_0, \dots, p_r]$ из $\mathcal{S}^k$, не являющийся ни положительным, ни отрицательным, называется *нейтральным*.

Пусть L — некоторое множество из $\mathcal{S}^k$. Число положительных r -симплексов из L под действием симплициального отображения f будем обозначать через $p(f, L, r)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. Пусть $k \leq n$, $\mathcal{S}^k$ — симметричная триангуляция и $f: \mathcal{S}^k \rightarrow \Sigma^n$ — нечетное симплициальное отображение. Тогда

$$p(f, \mathcal{S}^k, k) \equiv p(f, \mathcal{S}^{k-1}, k-1) \pmod{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем множество k -симплексов из верхней полусферы $\mathbb{S}_+^k$ на три непересекающихся множества: $\mathcal{A}_+$ — множество положительных k -симплексов, $\mathcal{A}_-$ — множество отрицательных k -симплексов и $\mathcal{A}_0$ — множество нейтральных k -симплексов. Положим

$$T = \sum_{s^k \in \mathcal{A}_+} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathcal{A}_-} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathcal{A}_0} p(f, s^k, k-1).$$

Отметим, что $p(f, s^k, k-1)$ — это число положительных $(k-1)$ -граней симплекса s^k . Каждый положительный симплекс s^{k-1} из $\mathbb{S}_+^k$, не лежащий в $\mathbb{S}^{k-1}$, является гранью в точности двух симплексов из $\mathbb{S}_+^k$, а каждый положительный симплекс s^{k-1} из $\mathbb{S}^{k-1}$ — гранью только одного симплекса s^k из $\mathbb{S}_+^k$. Поэтому

$$T \equiv p(f, \mathbb{S}^{k-1}, k-1) \pmod{2}.$$

Получим теперь другое представление для T . Рассмотрим произвольный нейтральный симплекс s^k из $\mathbb{S}_+^k$. Если он содержит положительную $k-1$ -грань, то его образ $f(s^k)$ может быть записан в виде

$$f(s^k) = [\pm e_{i_0}, \dots, \pm e_{i_k}],$$

где $i_0 \leq \dots \leq i_k$, и либо имеется одна повторяющаяся вершина, либо все вершины разные, но знаки не альтернируют. И в том, и в другом случае должна существовать одна пара соседних вершин с одинаковым знаком. Положительные $(k-1)$ -грань будут получаться при удалении одной из этих вершин. Тем самым доказано, что $p(f, s^k, k-1)$ — четное число для всех $s^k \in \mathcal{A}_0$. Следовательно,

$$T \equiv \left(\sum_{s^k \in \mathcal{A}_+} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathcal{A}_-} p(f, s^k, k-1) \right) \pmod{2}.$$

Поскольку каждый положительный симплекс s^k имеет ровно одну положительную $(k-1)$ -грань, а каждый отрицательный симплекс s^k имеет также ровно одну положительную $(k-1)$ -грань, то

$$\sum_{s^k \in \mathcal{A}_+} p(f, s^k, k-1) = \text{card } \mathcal{A}_+, \quad \sum_{s^k \in \mathcal{A}_-} p(f, s^k, k-1) = \text{card } \mathcal{A}_-.$$

Тем самым

$$T \equiv (\text{card } \mathcal{A}_+ + \text{card } \mathcal{A}_-) \pmod{2}.$$

В силу нечетности f симплекс s^k из $\mathbb{S}_+^k$ является отрицательным в том и только в том случае, если $\alpha(s^k)$ — положительный симплекс из $\mathbb{S}_-^k$. Поэтому

$$\text{card } \mathcal{A}_+ + \text{card } \mathcal{A}_- = p(f, \mathcal{S}^k, k).$$

□

ТЕОРЕМА 7.9 (комбинаторная лемма). Пусть $\mathcal{S}^n$ — симметричная триангуляция и $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \Sigma^n$ — нечетное симплициальное отображение. Тогда f отображает нечетное число симплексов из $\mathcal{S}^n$ в симплекс

$$[e_1, -e_2, \dots, (-1)^n e_{n+1}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 7.8

$$p(f, \mathbb{S}^n, n) \equiv p(f, \mathbb{S}^{n-1}, n-1) \equiv \dots \equiv p(f, \mathbb{S}^0, 0) \pmod{2}.$$

Поскольку $\mathbb{S}^0$ состоит из двух симметричных вершин и f отображает их в пару симметричных вершин, то $p(f, \mathbb{S}^0, 0) = 1$. □

7.4.3. Теорема Люстерника–Шнирельмана–Борсука. Пусть A — подмножество метрического пространства (X, ρ) . Через $\delta(A)$ обозначим диаметр множества A :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y).$$

ЛЕММА 7.10 (Лебег). Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ — семейство замкнутых непустых множеств из компактного метрического пространства (X, ρ) и $M_1 \cap \dots \cap M_n = \emptyset$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого подмножества $A \subset X$, пересекающегося с каждым из множеств M_i , $i = 1, \dots, n$, $\delta(A) \geq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывное отображение $\lambda: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i < j \leq n} \rho(x_i, x_j).$$

Из того, что $M_1 \cap \dots \cap M_n = \emptyset$, следует, что λ не обращается в нуль. Тем самым

$$\min_{(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n} \lambda(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon > 0.$$

Предположим, что $A \subset X$ пересекается с каждым из M_i , $i = 1, \dots, n$, и $x_i \in A \cap M_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как $\lambda(x_1, \dots, x_n) \geq \varepsilon$, то найдутся x_i и x_j , для которых $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Отсюда $\delta(A) \geq \varepsilon$. □

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 7.11 (Лебег). Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ — замкнутое покрытие компактного метрического пространства (X, ρ) . Тогда существует $\lambda > 0$ (число Лебега для данного покрытия) такое, что если некоторое множество A с диаметром, меньшим λ , пересекается с каждым из множеств $M_{i_1}, \dots, M_{i_r}$, то $M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_r} \neq \emptyset$.

Для доказательства теоремы Люстерника–Шнирельмана–Борсука нам потребуется еще один вспомогательный результат.

ЛЕММА 7.12. Пусть $M_1, \dots, M_{n+1}$ — замкнутые подмножества $\mathbb{S}^n$, ни одно из которых не содержит пары симметричных точек. Если семейство

$$\{M_1, \dots, M_{n+1}, \alpha(M_1), \dots, \alpha(M_{n+1})\}$$

является покрытием $\mathbb{S}^n$, то $M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M_{-i} = \alpha(M_i)$. Так как M_i не содержит ни одной пары симметричных точек, то

$$\max_{x \in M_i, y \in M_{-i}} \|x - y\| = \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Упорядочим покрытие следующим образом:

$$(7.10) \quad M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2}, \dots, M_{n+1}, M_{-(n+1)}.$$

Пусть λ — число Лебега для этого покрытия. Обозначим через $\mathcal{S}^n$ симметричную триангуляцию $\mathbb{S}^n$ с диаметром каждого симплекса, меньшим $\varepsilon = \min\{\lambda, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}\}$. Рассмотрим отображение $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \Sigma^n$, которое каждой вершине p из $\mathcal{S}^n$ ставит в соответствие вершину

$$f(p) = \text{sign } j(-1)^{j+1} e_{|j|},$$

где j таково, что M_j — первое множество из покрытия (7.10), содержащее p . Любые две вершины p_i и p_j не могут отобразиться в симметричные вершины, так как $\|p_i - p_j\| < \varepsilon$. Поэтому f — симплицальное отображение. Нетрудно убедиться, что оно нечетное. Из теоремы 7.9 вытекает, что найдется симплекс $[p_1, \dots, p_{n+1}]$, отображаемый f в $[e_1, -e_2, \dots, (-1)^n e_{n+1}]$. Можно для определенности считать, что $f(p_i) = (-1)^{i+1} e_i$. Это означает, что $p_i \in M_i$, т.е. $[p_1, \dots, p_{n+1}] \cap M_i \neq \emptyset$ при всех $i = 1, \dots, n+1$. Из теоремы 7.11 и того, что $\delta([p_1, \dots, p_{n+1}]) < \lambda$ вытекает, что $M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset$. $\square$

ТЕОРЕМА 7.13 (Люстерник–Шнирельман–Борсук). *В любом замкнутом покрытии $\{M_1, \dots, M_{n+1}\}$ множества $\mathbb{S}^n$ существует множество M_i , содержащее симметричные точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда, применяя лемму 7.12 к покрытию

$$\{M_1, \dots, M_{n+1}, \alpha(M_1), \dots, \alpha(M_{n+1})\},$$

получим, что $M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset$. Если $x_0 \in M_1 \cap \dots \cap M_{n+1}$, то $x_0 \in \alpha(M_j)$ для некоторого j , так как $\{\alpha(M_1), \dots, \alpha(M_{n+1})\}$ — тоже покрытие $\mathbb{S}^n$. Но тогда M_j будет содержать пару симметричных точек, что противоречит предположению. $\square$

7.4.4. Теорема Борсука.

ТЕОРЕМА 7.14 (Борсук). *Для любого непрерывного нечетного отображения $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдется точка $\hat{x} \in \mathbb{S}^n$, для которой $f(\hat{x}) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такой точки не существует. Тогда отображение $F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, определенное равенством

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

является непрерывным и нечетным. Проецируя границу какого-либо n -симплекса с центром в нуле на $\mathbb{S}^{n-1}$, можно разбить $\mathbb{S}^{n-1}$ на замкнутые множества $A_1, \dots, A_{n+1}$ (A_i — образы $(n-1)$ -граней при таком проектировании). Очевидно, что A_i не содержат симметричных точек. Положим $M_i = F^{-1}(A_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Тогда M_i — замкнутые множества, образующие покрытие $\mathbb{S}^n$. Из теоремы 7.13 следует, что существует $x \in M_i \cap \alpha(M_i)$ при некотором $1 \leq i \leq n+1$. Из нечетности F вытекает, что $F(x)$ и $-F(x)$ принадлежат A_i , что противоречит построению A_i . $\square$

7.5. Совершенные сплайны. Интерполяция сплайнами

7.5.1. Разделенные нули и существенные перемены знака функций. Пусть функция $x(\cdot)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$, $n \geq 2$ и

$$x(t_1) = \dots = x(t_n) = 0, \quad a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b.$$

Точки $t_1, \dots, t_n$ называются *разделенными нулями* функции $x(\cdot)$, если на каждом интервале (t_j, t_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, функция $x(\cdot)$ не есть тождественный нуль. Максимальное число разделенных нулей функции $x(\cdot)$ будем обозначать через $\nu(x(\cdot); [a, b])$. Если у функции $x(\cdot) \not\equiv 0$ не существует двух разделенных

нулей, но она обращается в нуль на отрезке $[a, b]$, то положим $\nu(x; [a, b]) = 1$. Если $|x(t)| > 0$, $t \in [a, b]$, то положим $\nu(x; [a, b]) = 0$.

Будем говорить, что функция $x(\cdot)$, определенная в каждой точке отрезка $[a, b]$, имеет n перемен знака, если существуют точки $a < t_0 < \dots < t_n < b$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для почти всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\alpha(-1)^j x(t_j + t) > 0, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где $\alpha = 1$ или -1 . Максимальное число перемен знака функции $x(\cdot)$ будем обозначать через $\mu(x(\cdot); [a, b])$.

Если функция $x(\cdot)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своей производной, то из теоремы Ролля вытекает, что

$$\nu(x'(\cdot); [a, b]) \geq \nu(x(\cdot); [a, b]) - 1.$$

ЛЕММА 7.15. Если $x(\cdot)$ — абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\mu(x'(\cdot); [a, b]) \geq \nu(x(\cdot); [a, b]) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно доказать, что между любыми двумя разделенными нулями функции $x(\cdot)$ ее производная имеет не менее одной перемены знака. Пусть $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, а t_1, t_2 — разделенные нули функции $x(\cdot)$. Тогда если предположить, что $x'(\cdot)$ не имеет перемен знака на $[a, b]$, то $x'(t) \geq 0$ или $x'(t) \leq 0$ почти всюду на (t_1, t_2) . Из того, что

$$x(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x'(t) dt = 0,$$

вытекает, что $x(t) \equiv 0$ на интервале (t_1, t_2) , что противоречит определению разделенных нулей. $\square$

7.5.2. Совершенные сплайны. Совершенным сплайном порядка r с N узлами $s_1 < \dots < s_N$ называется функция вида

$$s(t) = p_{r-1}(t) + \frac{\alpha}{r!} \left(t^r + 2 \sum_{j=1}^N (-1)^j (t - s_j)_+^r \right),$$

где $p_{r-1}(\cdot)$ — полином степени не выше $r-1$, $\alpha = 1$ или -1 , а

$$t_+ = \begin{cases} t, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Будем считать, что узлы лежат в интервале $(-1, 1)$. Совершенный сплайн характеризуется тем, что его $(r-1)$ -ая производная абсолютно непрерывна и $s^{(r)}(t) = \alpha(-1)^j$ при $t \in (s_j, s_{j+1})$, $j = 0, \dots, N$ ($s_0 = -1$, $s_{N+1} = 1$).

ТЕОРЕМА 7.16. Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu_j \leq r$, $j = 1, \dots, n$ и $m = \nu_1 + \dots + \nu_n \geq r$. Тогда существует совершенный сплайн порядка r с $m-r$ узлами в интервале $(-1, 1)$, удовлетворяющий условиям

$$(7.11) \quad s^{(\nu)}(t_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $N = m - r$ и

$$\mathbb{S}^N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N+1} : \|\xi\| = \sum_{j=1}^{N+1} |\xi_j| = 2 \right\}.$$

Для $\xi \in \mathbb{S}^N$ положим $s_0 = -1$, $s_j = -1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_j|$, $j = 1, \dots, N+1$. Тем самым $s_{N+1} = 1$. Нетрудно убедиться, что функция $s_\xi(\cdot) = p_{r-1}(\cdot) + g_\xi(\cdot)$, где

$$g_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-1} h_\xi(\tau) d\tau,$$

$p_{r-1}(\cdot)$ — полином степени не выше $r-1$, а

$$h_\xi(\tau) = \text{sign } \xi_j, \quad t \in (s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, \dots, N+1,$$

является совершенным сплайном с числом узлов, не превосходящим N . Выберем $1 \leq l \leq n$ и $1 \leq p \leq \nu_l$ так, чтобы $\nu_1 + \dots + \nu_{l-1} + p = r$. Полином $p_{r-1}(\cdot)$ определим из r условий

$$(7.12) \quad \begin{aligned} p_{r-1}^{(\nu)}(t_j) &= -g_\xi^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, l-1, \\ p_{r-1}^{(\nu)}(t_l) &= -g_\xi^{(\nu)}(t_l), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Мера множества точек t , в которых $h_{\xi'}(t) \neq h_\xi(t)$ стремится к нулю при $\xi' \rightarrow \xi$. Поэтому в силу неравенств

$$|g_{\xi'}^{(j)}(t) - g_\xi^{(j)}(t)| \leq \frac{1}{(r-j-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-j-1} |h_{\xi'}(\tau) - h_\xi(\tau)| d\tau, \\ j = 0, 1, \dots, r-1,$$

функции $g_\xi^{(j)}(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, непрерывно (относительно нормы в $C([-1, 1])$) зависят от ξ на сфере $\mathbb{S}^N$. Следовательно (в силу непрерывной зависимости от интерполяционных условий полинома p_{r-1}), и функции $s_\xi^{(j)}(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, непрерывно зависят от ξ .

Положим теперь для $\xi \in \mathbb{S}^N$

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \eta_{l,\nu}(\xi) &= s_\xi^{(\nu)}(t_l), \quad \nu = p, \dots, \nu_l - 1, \\ \eta_{j,\nu}(\xi) &= s_\xi^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = l+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Равенства (7.13) задают ровно N условий, которыми на $\mathbb{S}^N$ задается непрерывное и нечетное отображение $\eta: \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. В силу теоремы Борсука найдется $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^N$, для которого $\eta(\hat{\xi}) = 0$. С учетом равенств (7.12) это означает, что совершенный сплайн $s_{\hat{\xi}}(\cdot)$ удовлетворяет условиям (7.11).

Докажем, что у совершенного сплайна $s_{\hat{\xi}}(\cdot)$ ровно $m-r$ узлов. Действительно, по теореме Ролля у функции $s_{\hat{\xi}}^{(r-1)}(\cdot)$ не менее, чем $m-r+1$ разделенных нулей. Тогда по лемме 7.15 у $s_{\hat{\xi}}^{(r)}(\cdot)$ не менее $m-r$ перемен знака, что и означает наличие у $s_{\hat{\xi}}(\cdot)$ ровно $m-r$ узлов. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.17. Если $s_1 < \dots < s_{m-r}$ — узлы совершенного сплайна $s(\cdot)$ порядка r , удовлетворяющего интерполяционным условиям (7.11), то при всех $1 \leq j \leq m-r$ в промежутке $[-1, s_j]$ содержится не менее j интерполяционных условий, а в промежутке $(s_j, 1]$ — не менее $m-r-j+1$. При этом если при некотором k , $1 \leq k \leq n$, точка t_k совпала с каким-нибудь из узлов совершенного сплайна, то $\nu_k \leq r-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в промежутке $[-1, s_j]$ содержится менее j интерполяционных условий. Тогда отрезок $[s_j, 1]$ будет содержать более $m-j$ интерполяционных условий. Следовательно, функция $s^{(r-1)}(\cdot)$ будет иметь более $m-j-r+1$ разделенных нулей. По лемме 7.15 у $s^{(r)}(\cdot)$ должно тогда быть более $m-j-r$ перемен знака. Но, как легко убедиться, кусочно постоянная функция $s^{(r)}(\cdot)$, принимающая попеременно значения 1 и -1 , имеет на $[s_j, 1]$ ровно $m-j-r-1$ перемен знака. Аналогично доказывается утверждение относительно числа интерполяционных условий на промежутке $(s_j, 1]$.

Предположим, что точка t_k совпала с узлом s_j . Тогда по доказанному число интерполяционных условий левее точки t_k не менее j , правее — не менее $m-$

$r - j + 1$, а в самой точке — ν_k . В силу того, что общее число интерполяционных условий равно m , имеем

$$m \geq j + \nu_k + m - r - j + 1.$$

Отсюда $\nu_k \leq r - 1$. $\square$

7.5.3. Интерполяция сплайнами. Полиномиальным сплайном степени $r - 1$, $r \in \mathbb{N}$, с N узлами $s_1 < \dots < s_N$ называется функция вида

$$S(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j t^j + \sum_{j=1}^N b_j (t - s_j)_+^{r-1}.$$

На каждом из промежутков $(-\infty, s_1]$, $[s_1, s_2]$, $\dots$, $[s_N, +\infty)$ сплайн $S(\cdot)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше $r - 1$, а при $r \geq 2$ $S^{(r-2)}(\cdot)$ — непрерывная кусочно-линейная функция.

ТЕОРЕМА 7.18. Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu_j \leq r$, $j = 1, \dots, n$ и $m = \nu_1 + \dots + \nu_n \geq r$. Пусть, кроме того, $s_1 < \dots < s_{m-r}$ — узлы совершенного сплайна порядка r , удовлетворяющего условиям (7.11). Тогда для любых $x_{j\nu}$ существует единственный полиномиальный сплайн $S(\cdot)$ степени $r - 1$ с узлами в точках $s_1, \dots, s_{m-r}$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$(7.14) \quad S^{(\nu)}(t_j) = x_{j\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (7.14) — это система линейных уравнений порядка m относительно коэффициентов сплайна a_j , b_j . Для доказательства ее однозначной разрешимости при любых $x_{j\nu}$ достаточно доказать, что однородная система имеет только нулевое решение.

Допустим противное, т. е. существует сплайн $S(\cdot) \not\equiv 0$, обращающийся в нуль в точках t_j с соответствующими кратностями. Тогда возможны следующие случаи (здесь по-прежнему считается, что $s_0 = -1$, а $s_{N+1} = 1$):

- (1) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[-1, 1]$;
- (2) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[-1, s_j]$, $1 \leq j \leq N$, но $S(t) \equiv 0$ на $[s_j, s_{j+1}]$;
- (3) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[s_j, 1]$, $1 \leq j \leq N$, но $S(t) \equiv 0$ на $[s_{j-1}, s_j]$;
- (4) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[s_j, s_{j+k}]$, $1 \leq j < j+k \leq N$, но $S(t) \equiv 0$ на $[s_{j-1}, s_j]$ и $[s_{j+k}, s_{j+k+1}]$.

Предположим, что имеет место случай 1. Тогда $S^{(r-2)}(\cdot)$ имеет по теореме Ролля не менее $m - r + 2$ разделенных нулей и, следовательно, число перемен знака у $S^{(r-1)}(\cdot)$ — не менее $m - r + 1$, но у кусочно-постоянной на $m - r + 1$ интервалах функции не может быть больше $m - r$ перемен знака.

Пусть имеет место случай 2. Тогда в силу непрерывности $S^{(r-2)}(\cdot)$

$$S^{(\nu)}(s_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 2.$$

Тем самым из предложения 7.17 вытекает, что у сплайна $S(\cdot)$ на отрезке $[-1, s_j]$ имеется не менее $j + r - 1$ нулевых интерполяционных условий. Отсюда аналогично предыдущему случаю заключаем, что $S^{(r-1)}(\cdot)$ имеет не менее j перемен знака, что невозможно для функции, кусочно постоянной на j интервалах.

Случай 3 рассматривается аналогично. Перейдем к последнему случаю 4. Обозначим число нулевых интерполяционных условий на интервале $(t_j, t_j + k)$ через p . Тогда если α — число интерполяционных условий левее этого интервала, а β — правее, то в силу предложения 7.17

$$\alpha + p \geq j + k, \quad p + \beta \geq m - r - j + 1.$$

Складывая эти неравенства получаем, что $p \geq k - r + 1$. Учитывая непрерывность $S^{(r-2)}(\cdot)$ получаем еще $2r - 2$ нулевых интерполяционных условий на

концах интервала $(t_j, t_j + k)$. Следовательно, $S^{(r-1)}(\cdot)$ имеет не менее k перемен знака, что невозможно для функции, кусочно постоянной на k интервалах. $\square$

7.6. Граничные значения аналитических функций

7.6.1. Граничные значения интеграла Пуассона–Стилтьеса. *Интегралом Пуассона* называется интеграл вида

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) f(t) dt,$$

где

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$$

— *ядро Пуассона*. Если $f(\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период 2π , то интеграл Пуассона дает решение классической задачи Дирихле для единичного круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, представляя собой гармоническую функцию в D , непрерывную в $\bar{D}$ и принимающую значения $f(\theta)$ для $z = e^{i\theta}$.

Пусть $\mu(\cdot)$ — функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$. *Интегралом Пуассона–Стилтьеса* называется интеграл вида

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\mu(t).$$

При этом, как несложно показать, функция $u(\cdot)$ — снова гармоническая в D . Нас будут интересовать существование радиальных граничных значений этой функции, т. е. величин

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta_0}).$$

ТЕОРЕМА 7.19. Пусть $u(\cdot)$ — интеграл Пуассона–Стилтьеса для функции ограниченной вариации $\mu(\cdot)$ и при некотором $0 < \theta_0 < 2\pi$ существует $\mu'(\theta_0)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta_0}) = \mu'(\theta_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тем, что при всех $0 < r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t) dt = 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} (7.15) \quad u(re^{i\theta_0}) - \mu'(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta_0) d(\mu(t) - \mu'(\theta_0)t) \\ &= \frac{1}{2\pi} P(r, t - \theta_0) (\mu(t) - \mu'(\theta_0)t) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu(t) - \mu'(\theta_0)t) \frac{\partial P(r, t - \theta_0)}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

В силу того, что для любого t $P(r, t) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$, достаточно доказать, что интеграл в правой части (7.15) стремится к нулю.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $0 < \delta < \min\{\theta_0, 2\pi - \theta_0\}$ такое, что при всех $0 < t < \delta$

$$(7.16) \quad \left| \frac{\mu(\theta_0 + t) - \mu(\theta_0 - t)}{2t} - \mu'(\theta_0) \right| < \varepsilon.$$

Поскольку при всех $t \in [0, \theta_0 - \delta] \cup [\theta_0 + \delta, 2\pi]$

$$\left| \frac{\partial P(r, t - \theta_0)}{\partial t} \right| \leq \frac{2r(1 - r^2)}{(1 - 2r \cos \delta + r^2)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0,$$

то интеграл в правой части (7.15), взятый по отрезку $[0, \theta_0 - \delta] \cup [\theta_0 + \delta, 2\pi]$ стремиться к нулю при $r \rightarrow 1$. Обозначим интеграл по оставшейся части через I_δ . Имеем

$$\begin{aligned} I_\delta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (\mu(t + \theta_0) - \mu'(\theta_0)(t + \theta_0)) \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} (\mu(t + \theta_0) - \mu'(\theta_0)(t + \theta_0)) \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} (\mu(-t + \theta_0) - \mu'(\theta_0)(-t + \theta_0)) \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} (\mu(t + \theta_0) - \mu(-t + \theta_0) - \mu'(\theta_0)2t) \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (7.16), получаем

$$\begin{aligned} |I_\delta| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{\delta} 2t \left(-\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} \right) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \left(-\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} \right) dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(-tP(r, t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt \right) = \varepsilon \frac{2r}{1+r} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Поскольку функция ограниченной вариации имеет почти всюду производную, то из доказанной теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.20. Пусть $u(\cdot)$ — интеграл Пуассона–Стилтьеса для функции ограниченной вариации $\mu(\cdot)$. Тогда для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = \mu'(\theta).$$

На самом деле имеет место более сильное утверждение, заключающееся в том, что интеграл Пуассона–Стилтьеса для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ имеет предельные значения, когда точка $z = re^{i\varphi} \in D$ стремится к точке $e^{i\theta}$ по любому некасательному пути (см. [41], [49], [3]).

7.6.2. Граничные свойства гармонических функций из пространства h_1 . Обозначим через h_1 множество гармонических в единичном круге D функций $u(\cdot)$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

ТЕОРЕМА 7.21. Каждая функция $u(\cdot) \in h_1$ представима интегралом Пуассона–Стилтьеса с некоторой функцией ограниченной вариации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(\cdot) \in h_1$. Рассмотрим функцию

$$\mu_r(t) = \int_0^t u(re^{i\theta}) d\theta.$$

В силу того, что

$$|\mu_r(t)| \leq \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq C$$

и для всех $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$

$$\sum_{k=1}^n |\mu_r(t_k) - \mu_r(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq C,$$

функция $\mu_r(\cdot)$ будет равномерно ограниченной и равномерно ограниченной вариации относительно r , $0 < r < 1$. Взяв последовательность функций $\mu_{r_n}(\cdot)$, где $r_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, по теореме Хелли (см., например, [45, стр. 344]) из нее можно выбрать подпоследовательность $\mu_{r_{n_k}}(\cdot)$, сходящуюся в каждой точке из отрезка $[0, 2\pi]$ к некоторой функции ограниченной вариации $\mu(\cdot)$, причем для любой функции $f(t)$, непрерывной на отрезке $[0, 2\pi]$,

$$(7.17) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) d\mu_{r_{n_k}}(t) = \int_0^{2\pi} f(t) d\mu(t).$$

Возьмем произвольную точку $z = re^{i\theta} \in D$. Тогда из (7.17) и формулы Пуассона для круга радиуса r_{n_k} имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\mu(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\mu_{r_{n_k}}(t) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) u(r_{n_k} e^{it}) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} u(r_{n_k} z) = u(z). \end{aligned}$$

□

Из теоремы 7.21 и следствия 7.20 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.22. *Функции из h_1 имеют почти всюду радиальные граничные значения.*

7.6.3. Пространства Харди $\mathcal{H}_p$. Пространством Харди $\mathcal{H}_p$, $0 < p < \infty$, называется множество функций $f(\cdot)$, аналитических в единичном круге D , для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

При $p = \infty$ пространством $\mathcal{H}_\infty$ называется множество функций, аналитических и ограниченных в D .

Из неравенства $x^p < x^q + 1$, выполненного при всех $0 < p < q$ и $x \geq 0$, вытекает, что $\mathcal{H}_q \subset \mathcal{H}_p$ при $0 < p < q$. В частности $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_1$ при $p > 1$. Так как вещественная и мнимая части функции из $\mathcal{H}_1$ являются гармоническими функциями из h_1 , то из следствия 7.22 вытекает, что функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $p \geq 1$, имеют почти всюду радиальные граничные значения, которые обозначаются через $f(e^{i\theta})$. Из теоремы Фату ([45, стр. 287]) следует, что $f(e^{i\theta}) \in L_p([0, 2\pi])$.

Если функция $f(\cdot)$ аналитична в D и имеет там конечное число нулей $z_1, \dots, z_n$ (каждый нуль повторяется столько раз, какова его кратность), то ее можно представить в виде

$$f(\cdot) = B_n(\cdot)g(\cdot),$$

где $g(\cdot)$ аналитична в D и не имеет там нулей, а

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$$

— *конечное произведение Бляшке*. Нетрудно убедиться, что $|B_n(z)| \leq 1$ при $z \in D$ и $|B_n(e^{i\theta})| \equiv 1$.

ТЕОРЕМА 7.23. *Пусть функция $f(\cdot)$ аналитична в единичном круге D . Тогда*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad p > 0,$$

есть неубывающая функция r в интервале $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $0 < \rho < 1$ функция $f_\rho(z) = f(\rho z)$ аналитична в $\overline{D}$ и, следовательно, имеет конечное число нулей в D . Тем самым ее можно представить в виде

$$f_\rho(\cdot) = b_\rho(\cdot)h_\rho(\cdot),$$

где $b_\rho(\cdot)$ — конечное произведение Бляшке, а $h_\rho(\cdot)$ — аналитическая функция в $\overline{D}$, не имеющая нулей в D . Тогда функция $h_\rho^p(\cdot)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Запишем для нее интеграл Пуассона

$$h_\rho^p(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) h_\rho^p(e^{it}) dt.$$

Следовательно,

$$|h_\rho(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) |h_\rho(e^{it})|^p dt.$$

Интегрируя это равенство по θ от нуля до 2π , получаем

$$\int_0^{2\pi} |h_\rho(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |h_\rho(e^{it})|^p dt.$$

Поскольку $|b_\rho(re^{i\theta})| \leq 1$ и $|b_\rho(e^{it})| \equiv 1$, то $|f_\rho(re^{i\theta})|^p \leq |h_\rho(re^{i\theta})|^p$ и $|f_\rho(e^{it})| \equiv |h_\rho(e^{it})|$. Таким образом, при всех r и ρ из интервала $(0, 1)$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} |f_\rho(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f_\rho(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Положив $r = \rho_1/\rho$, где $\rho_1 < \rho$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho_1 e^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.$$

□

7.6.4. Бесконечные произведения Бляшке. Пусть $z_1, \dots, z_n, \dots$ — последовательность комплексных чисел из единичного круга D такая, что $0 < |z_1| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$ и $m \in \mathbb{Z}_+$. Бесконечным произведением Бляшке называется произведение

$$(7.18) \quad z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}.$$

ТЕОРЕМА 7.24. Если

$$(7.19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty,$$

то бесконечное произведение Бляшке (7.18) сходится равномерно на каждом круге $|z| \leq r < 1$ к аналитической в D функции $B(\cdot)$, для которой $|B(z)| < 1$ в D и почти всюду $|B(e^{i\theta})| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $|z| \leq r < 1$ имеем

$$\left| 1 - \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \right| = \left| \frac{(z_n + |z_n|z)(1 - |z_n|)}{z_n(1 - \bar{z}_n z)} \right| \leq \frac{2(1 - |z_n|)}{1 - r}.$$

Из условия (7.19) вытекает равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \right|$$

на каждом круге $|z| \leq r < 1$. Отсюда следует равномерная сходимость произведения (7.18). Условие $|B(z)| < 1$, $z \in D$, выполнено, т. к. оно выполнено для

каждого из сомножителей. Таким образом, функция $B(\cdot) \in \mathcal{H}_\infty$ и имеет почти всюду радиальные граничные значения $B(e^{i\theta})$.

Докажем, что почти всюду $|B(e^{i\theta})| = 1$. Для каждой функции из $f(\cdot) \in \mathcal{H}_\infty$ из теоремы 7.23 и теоремы Лебега ([45, стр. 284]) вытекает справедливость неравенства

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Запишем это неравенство для функции $f(\cdot) = B(\cdot)/B_n(\cdot)$, где

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}.$$

Поскольку $|B_n(e^{i\theta})| \equiv 1$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

В силу того, что $B_n(\cdot)$ стремится к $B(\cdot)$ равномерно на $|z| = r$, получаем

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

С другой стороны $|B(e^{i\theta})| \leq 1$ почти всюду. Отсюда следует, что почти всюду $|B(e^{i\theta})| = 1$. $\square$

7.6.5. Формула Йенсена.

ЛЕММА 7.25. Пусть $|z_0| = \rho$. Тогда имеет место равенство

$$(7.20) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\rho e^{i\theta} - z_0| d\theta = \ln \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f(z) = \ln(z - z_0)$ аналитична в круге $|z| \leq r < \rho$. По формуле Пуассона

$$\ln |z_0| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |re^{i\theta} - z_0| d\theta.$$

Докажем, что

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |re^{i\theta} - z_0| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\rho e^{i\theta} - z_0| d\theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \rho - 0.$$

Пусть $z = \rho e^{i\theta_0}$. Имеем

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln |1 - \varepsilon - e^{-i(\theta-\theta_0)}| - \ln |1 - e^{-i(\theta-\theta_0)}|) d\theta,$$

где $\varepsilon = 1 - r/\rho$. В силу периодичности

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln |1 - \varepsilon - e^{-i\theta}| - \ln |1 - e^{-i\theta}|) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln((1 - \varepsilon)4 \sin^2 \theta/2 + \varepsilon^2) - \ln 4 \sin^2 \theta/2) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\ln((1 - \varepsilon)4 \sin^2 \alpha + \varepsilon^2) - \ln 4 \sin^2 \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\pi} \alpha (\ln((1-\varepsilon)4\sin^2\alpha + \varepsilon^2) - \ln 4\sin^2\alpha) \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha \left(\frac{(1-\varepsilon)4\sin 2\alpha}{(1-\varepsilon)4\sin^2\alpha + \varepsilon^2} - \frac{4\sin 2\alpha}{4\sin^2\alpha} \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\delta^2}{4\sin^2\alpha + \delta^2} d\alpha,\end{aligned}$$

где

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}.$$

Положим

$$I_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\delta^2}{4\sin^2\alpha + \delta^2} d\alpha.$$

В силу того, что

$$\frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$0 \leq I_0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\delta^2}{4\sin^2\alpha + \delta^2} d\alpha = \frac{\pi\delta}{2\sqrt{4+\delta^2}}.$$

Отсюда следует, что $I_0 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\Delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 7.26. Пусть функция $f(\cdot)$ аналитична в единичном круге D и $0 < |z_1| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$ — ее нули (каждый нуль пишется столько раз, какова его кратность). Тогда для любого $0 < \rho < 1$ имеет место равенство

$$(7.21) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln |f(0)| + \sum_{|z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $z_1, \dots, z_n$ — все нули $f(\cdot)$ в круге $|z| < \rho$. Рассмотрим сначала случай, когда $|z_{n+1}| > \rho$. Положим $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Тогда имеет место представление

$$f_\rho(\cdot) = b_\rho(\cdot) h_\rho(\cdot),$$

где

$$b_\rho(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j/\rho}{1 - \bar{z}_j z/\rho},$$

а $h_\rho(\cdot)$ — аналитическая функция в $\bar{D}$, не обращающаяся в нуль. Тем самым функция $\ln h_\rho(z)$ аналитична в $\bar{D}$ и по формуле Пуассона

$$\ln |h_\rho(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |h_\rho(e^{i\theta})| d\theta.$$

Отсюда, учитывая, что $|h_\rho(e^{i\theta})| \equiv |f_\rho(e^{i\theta})|$, получаем доказываемое равенство.

Пусть теперь $|z_{n+1}| = \dots = |z_{n+k}| = \rho$, а $|z_{n+k+1}| > \rho$. Положим

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{(z - z_{n+1}) \dots (z - z_{n+k})}.$$

Функция $f_1(\cdot)$ не имеет нулей на окружности радиуса ρ и по доказанному к ней можно применить формулу (7.21). Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_1(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln |f_1(0)| + \sum_{|z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\rho e^{i\theta} - z_{n+j}| d\theta \\ = \ln |f(0)| - \sum_{j=1}^k |z_{n+j}| + \sum_{|z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство (7.20), получаем доказываемое равенство в общем случае. $\square$

Равенство (7.21) обычно называется *формулой Йенсена*.

7.6.6. Факторизация функций из $\mathcal{H}_p$.

ТЕОРЕМА 7.27. Если $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $p > 0$, и $0 \leq |z_1| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$ — нули $f(\cdot)$, записанные с учетом кратности, то

$$(7.22) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\cdot)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности $m \geq 0$. Положим $g(z) = f(z)/z^m$. Тогда по формуле Йенсена (7.21) для любого $\rho \in (0, 1)$ такого, что $|z_n| \neq \rho$ при всех n ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln |g(0)| + \sum_{0 < |z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}.$$

Подставляя выражение функции $g(\cdot)$ через $f(\cdot)$, получим

$$\sum_{0 < |z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta - m \ln \rho - \ln \frac{|f^{(m)}(0)|}{m!}.$$

Из того, что $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, и очевидного неравенства $\ln x \leq x^p/p$, справедливого при всех $p > 0$ и $x > 0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \leq C.$$

Тем самым для ρ достаточно близких к единице

$$\sum_{0 < |z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|} \leq C_1,$$

где константа C_1 не зависит от ρ . Следовательно, для любого $N > 0$ при всех ρ достаточно близких к единице

$$\sum_{n=1}^N \ln \frac{\rho}{|z_n|} \leq C_1.$$

Устремляя ρ к единице, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{|z_n|} < \infty.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда (7.22). $\square$

ТЕОРЕМА 7.28. Всякая функция $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $p > 0$, не являющаяся тождественным нулем, может быть представлена в виде $f(\cdot) = B(\cdot)g(\cdot)$, где $B(\cdot)$ — произведение Бляшке (конечное или бесконечное), а $g(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ и не обращается в нуль в единичном круге D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ — нули $f(\cdot)$. Пусть $f(\cdot)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности $m \geq 0$. Положим

$$B_n(z) = z^m \prod_{k=1}^n \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}, \quad g_n(\cdot) = \frac{f(\cdot)}{B_n(\cdot)}.$$

При фиксированном n для любого $\varepsilon > 0$ $|B_n(z)| > 1 - \varepsilon$ при $|z|$ достаточно близких к единице. Поэтому для достаточно больших r

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} C.$$

Из теоремы 7.23 следует, что это неравенство выполнено при всех $r \in (0, 1)$. Устремляя ε к нулю, получаем, что для всех $r \in (0, 1)$

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq C.$$

Если число нулей $f(\cdot)$ конечно, то на этом доказательство заканчивается. Предположим, что число нулей $f(\cdot)$ бесконечно. Тогда из теорем 7.24 и 7.27 следует, что $g_n(z)$ равномерно стремится на каждой окружности $|z| = r$ к функции $g(\cdot) = f(\cdot)/B(\cdot)$. Поэтому $g(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ и не имеет нулей в D . $\square$

В 7.6.3 было отмечено, что у функций из $\mathcal{H}_p$ при $p \geq 1$ почти всюду существуют радиальные граничные значения $f(e^{i\theta}) \in L_p([0, 2\pi])$. Это остается справедливым и для $0 < p < 1$. Действительно, пусть $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $0 < p < 1$. По теореме 7.28 ее можно представить в виде $f(\cdot) = B(\cdot)g(\cdot)$, где $g(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ и не имеет нулей. Тогда функция $g^p(\cdot) \in \mathcal{H}_1$ и, следовательно, почти всюду имеет радиальные граничные значения из $L_1([0, 2\pi])$. Но тогда и $g(\cdot)$ имеет почти всюду радиальные граничные значения, принадлежащие $L_p([0, 2\pi])$. Так как $B(\cdot) \in \mathcal{H}_\infty$, то получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.29. Если $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $0 < p \leq \infty$, то у нее почти всюду существуют радиальные граничные значения $f(e^{i\theta}) \in L_p([0, 2\pi])$.

7.6.7. Формула Коши для функций из $\mathcal{H}_p$.

ТЕОРЕМА 7.30. Если $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $0 < p < \infty$, то

$$(7.23) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

и

$$(7.24) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала (7.24) для $p = 2$. Если

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}_2,$$

то при всех $r \in (0, 1)$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < C,$$

где C не зависит от r . Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

При всех $0 < r < \rho < 1$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\rho^n - r^n)^2 \leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2.$$

Устремляя ρ к единице, по теореме Фату ([45, стр. 287]) получим, что

$$(7.25) \quad \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2.$$

Так как сумма ряда в правой части (7.25) стремится к нулю при $r \rightarrow 1$, то (7.24) для $p = 2$ доказано. Из неравенства

$$|\|f(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi])} - \|g(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi])}| \leq \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi])}$$

сразу же получаем и (7.23) для $p = 2$.

Если $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $0 < p < \infty$, воспользуемся представлением $f(\cdot) = B(\cdot)g(\cdot)$ из теоремы 7.28. Тогда $g^{p/2}(\cdot) \in \mathcal{H}_2$ и пользуясь доказанным

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \rightarrow \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

С другой стороны, по теореме Фату

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

что и завершает доказательство равенства (7.23).

Докажем (7.24). В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [45, стр. 282]) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого множества $\omega \subset [0, 2\pi]$ с мерой $\text{mes } \omega < \delta$ выполняется неравенство

$$\int_{\omega} |f(e^{i\theta})|^p d\theta < \varepsilon.$$

Возьмем произвольную последовательность $r_n \rightarrow 1$, $r_n < 1$. Поскольку $f(r_n e^{i\theta})$ почти всюду сходится к $f(e^{i\theta})$, то по теореме Егорова ([45, стр. 269]) найдется такое множество ω_1 , $\text{mes } \omega_1 < \delta$, что на множестве $E = [0, 2\pi] \setminus \omega_1$ сходимость $f(r_n e^{i\theta}) \rightarrow f(e^{i\theta})$ будет равномерной. Поэтому

$$(7.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f(r_n e^{i\theta})|^p d\theta = \int_E |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Из (7.23) и (7.26) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega_1} |f(r_n e^{i\theta})|^p d\theta = \int_{\omega_1} |f(e^{i\theta})|^p d\theta < \varepsilon.$$

Выберем N_1 так, чтобы для всех $n > N_1$ выполнялось неравенство

$$\int_{\omega_1} |f(r_n e^{i\theta})|^p d\theta < \varepsilon.$$

В силу равномерной сходимости последовательности $f(r_n e^{i\theta})$ найдется N_2 такое, что для всех $n > N_2$ на E будет выполняться неравенство

$$|f(r_n e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p < \varepsilon.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда, пользуясь легко доказываемым неравенством

$$|a - b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(r_n e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta &\leq \int_E |f(r_n e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \\ &+ 2^p \int_{\omega_1} (|f(r_n e^{i\theta})|^p + |f(e^{i\theta})|^p) d\theta \leq 2\pi\varepsilon + 2^p 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и последовательности r_n вытекает (7.24). $\square$

ТЕОРЕМА 7.31. Для функций $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет место формула Пуассона

$$(7.27) \quad f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P(r, t - \theta) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что для $1 < p \leq \infty$ $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_1$, достаточно доказать теорему для $\mathcal{H}_1$. Пусть $f(\cdot) \in \mathcal{H}_1$. Положим для $0 < \rho < 1$ $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Функция $f_\rho(\cdot)$ аналитична в $\overline{D}$ и поэтому для нее имеет место формула Пуассона

$$f_\rho(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\rho(e^{it}) P(r, t - \theta) dt.$$

Тем самым

$$f(\rho re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) P(r, t - \theta) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| f(\rho re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P(r, t - \theta) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - f(e^{it})| P(r, t - \theta) dt \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - f(e^{it})| dt. \end{aligned}$$

Устремляя ρ к единице и пользуясь (7.24) при $p = 1$, получаем равенство (7.27) $\square$

ТЕОРЕМА 7.32. Для функций $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет место формула Коши

$$(7.28) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = re^{i\theta}$, а $\xi = e^{it}$. Тогда в силу того, что

$$P(r, t - \theta) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{\xi}z|^2},$$

равенство (7.27) может быть записано в виде

$$(7.29) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \frac{1 - |z|^2}{(\xi - z)(1 - \bar{\xi}z)} d\xi.$$

Предположим, что $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Для фиксированного $z \in D$ рассмотрим функцию

$$g_z(\zeta) = \frac{1}{1 - |z|^2} (1 - \bar{z}\zeta) f(\zeta).$$

очевидно, что $g_z(\cdot) \in \mathcal{H}_p$. Записывая для нее равенство (7.29), получим (7.28). $\square$

7.7. Задача Неванлинны-Пика

Обозначим через $H_\infty^\mathbb{R}$ множество функций из H_∞ , вещественных на вещественной оси. Пусть $z_0, z_1, \dots, z_n$ — различные точки из интервала $(-1, 1)$. Положим

$$A_n = \{ (f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_n)) : f(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R} \}.$$

Множество A_n является ограниченным множеством из $\mathbb{R}^{n+1}$. В силу принципа компактности оно замкнуто. Кроме того, это множество выпукло. Действительно, если $(a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) \in A_n, j = 1, 2$, то найдутся функции $f_j(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}, j = 1, 2$, такие, что $f_j(z_k) = a_k^{(j)}, k = 0, 1, \dots, n, j = 1, 2$. Тогда для всех $\lambda \in [0, 1]$

$$(1 - \lambda)(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}) + \lambda(a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}) \in A_n,$$

так как функция $f(\cdot) = (1 - \lambda)f_1(\cdot) + \lambda f_2(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}$ и $f(z_k) = (1 - \lambda)a_k^{(1)} + \lambda a_k^{(2)}, k = 0, 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 7.33. *Каждой граничной точке множества A_n соответствует единственная функция $f(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}$ вида*

$$(7.30) \quad f(z) = \lambda \frac{z^m + p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{1 + p_1 z + \dots + p_m z^m},$$

где $\lambda = \pm 1, m \leq n$, а $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ — граничная точка A_n и $f(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}$ такова, что $f(z_j) = c_j, j = 0, 1, \dots, n$. Если хотя бы для одного из чисел $|c_j| = 1$, то $f(z) = c_0 = c_1 = \dots = c_n$. Тем самым функция $f(\cdot)$ имеет вид (7.30) с $m = 0$. Предположим, что $|c_j| < 1, j = 0, 1, \dots, n$. Положим

$$f_1(z) = \frac{\frac{f(z) - c_0}{1 - c_0 f(z)}}{\frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}, \quad c_j^{(1)} = \frac{\frac{c_j - c_0}{1 - c_0 c_j}}{\frac{z_j - z_0}{1 - z_0 z_j}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Несложно убедиться, что $f_1(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}$ и имеют место равенства $f_1(z_j) = c_j^{(1)}, j = 1, \dots, n$. Если хотя бы для одного из чисел $|c_j^{(1)}| = 1$, то $f_1(z) = c_1^{(1)} = \dots = c_n^{(1)}$. В этом случае имеем для функции $f(\cdot)$

$$f(z) = \frac{c_0 + c_1^{(1)} \frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}{1 + c_0 c_1^{(1)} \frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}.$$

Легко проверяется, что в этом случае функция $f(\cdot)$ имеет вид (7.30) с $m = 1$. Предположим, что $|c_j^{(1)}| < 1, j = 1, \dots, n$. Продолжая этот процесс, на k -ом шаге будем иметь

$$f_k(z) = \frac{\frac{f_{k-1}(z) - c_{k-1}^{(k-1)}}{1 - c_{k-1}^{(k-1)} f_{k-1}(z)}}{\frac{z - z_{k-1}}{1 - z_{k-1} z}}, \quad c_j^{(k)} = \frac{\frac{c_j^{(k-1)} - c_{k-1}^{(k-1)}}{1 - c_{k-1}^{(k-1)} c_j^{(k-1)}}}{\frac{z_j - z_{k-1}}{1 - z_{k-1} z_j}}, \quad j = k, \dots, n.$$

Для $f_k(\cdot) \in H_\infty^\mathbb{R}$ имеют место равенства $f_k(z_j) = c_j^{(k)}, j = k, \dots, n$. Если хотя бы для одного из чисел $|c_j^{(k)}| = 1$, то $f_k(z) = c_k^{(k)} = \dots = c_n^{(k)}$. В этом случае переходим от функции $f_k(\cdot)$ к функции $f_{k-1}(\cdot)$, затем к $f_{k-2}(\cdot)$ и так далее, пока не придем к выражению для $f(\cdot)$. При этом на каждом этапе эти функции могут быть записаны в виде (7.30) с соответствующим m .

Если же, придя к последнему n -ому этапу, окажется, что $|c_n^{(n)}| < 1$, то это же неравенство и все предыдущие строгие неравенства для $c_j^{(k)}$ будут выполняться для любых точек $(c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*)$ достаточно близких к точке $(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Тогда, положив $f_n(z) = (c_n^{(n)})^*$ и применив рекуррентную процедуру, придем к функции $f^*(\cdot) \in H_\infty^{\mathbb{R}}$, принимающей в заданных точках значения $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$, что противоречит тому, что точка $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ является граничной. Единственность вытекает из проведенного выше анализа вида функции $f(\cdot)$. $\square$

Рассмотрим интерполяционный полином Лагранжа (см. (1.1))

$$L_n(z) = \sum_{j=0}^n l_j(z) c_j, \quad l_j(z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{z - z_k}{z_j - z_k}.$$

Имеем

$$L_n(z_j) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Положим

$$M_j = \sup_{|z| \leq 1} |l_j(z)|, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\|L_n(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + \dots + M_n^2} \sqrt{|c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2}.$$

Следовательно, все точки $(c_0, c_1, \dots, c_n)$, достаточно близкие к нулю, лежат в множестве A_n . Тем самым $(0, 0, \dots, 0)$ — внутренняя точка множества A_n .

Пусть $R = R(c_0, c_1, \dots, c_n)$ — верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что $(rc_0, rc_1, \dots, rc_n) \in A_n$. Число R конечно и положительно, поскольку A_n ограничено и имеет начало координат своей внутренней точкой. В силу выпуклости множества A_n $(rc_0, rc_1, \dots, rc_n) \in A_n$ при всех $r \leq R$. А в силу замкнутости $(Rc_0, Rc_1, \dots, Rc_n) \in A_n$. Из определения R следует, что точка $(Rc_0, Rc_1, \dots, Rc_n)$ является граничной.

Рассмотрим отображение $\xi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, определенное равенством

$$\xi(c_0, c_1, \dots, c_n) = (c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*),$$

где $(c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*) = (Rc_0, Rc_1, \dots, Rc_n)$.

ТЕОРЕМА 7.34. *Отображение ξ является непрерывным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$. Пусть ей соответствует граничная точка $c^* = (c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*)$. Если точка $d = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ достаточно близка к точке $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, то угол α между этими векторами достаточно мал. Будем считать, что векторы c и d не коллинеарны, так

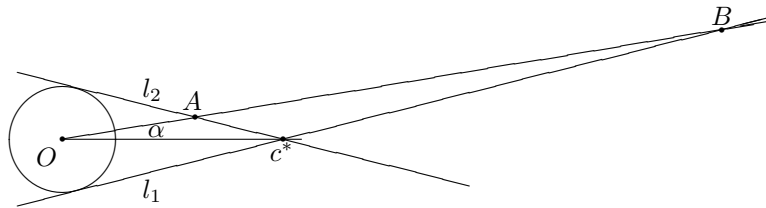


Рис. 7.7.1

как в противном случае $\alpha = 0$ и образы векторов совпадают. Рассмотрим плоскость, проходящую через эти два вектора (см. рис. 7.7.1). Из того, что начало координат является внутренней точкой, вытекает существование шара некоторого радиуса r , лежащего в множестве A_n . В построенной плоскости проведем из точки c^* касательные к кругу радиуса r с центром в начале координат l_1 и l_2 . Через d^* обозначим граничную точку, соответствующую вектору d . В силу выпуклости точка d^* должна лежать на луче, соединяющим начало координат с точкой d , в той же полуплоскости относительно прямой l_1 , что и сам круг (в противном случае точка c^* не являлась бы граничной). С другой стороны, она должна лежать в той полуплоскости относительно прямой l_2 , которая не содержит круг (в противном случае из-за выпуклости на луче, соединяющем начало координат с точкой d , нашлась бы точка из A_n более удаленная от начала координат). Таким образом, точка d^* лежит на части луча, которая находится в пересечении двух упомянутых полуплоскостей (на рис. 7.7.1 это отрезок AB). Легко понять, что все точки отрезка AB стремятся к c^* при $\alpha \rightarrow 0$. Этим доказана непрерывность отображения ξ . $\square$

Как было доказано в теореме 7.33 каждой граничной точке множества A_n можно поставить единственную функцию вида (7.30). Нетрудно показать, что несократимая дробь (7.30) является произведением Бляшке

$$B_m(z) = \lambda \prod_{j=1}^m \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z}, \quad \alpha_j \in D, \quad j = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим отображение $\eta: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}_n$ (здесь под $\mathcal{B}_n$ мы понимаем множество произведений Бляшке порядка не выше n), которое каждой точке $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ ставит в соответствие произведение Бляшке, соответствующее граничной точке $\xi(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Нетрудно убедиться, что $\eta(\cdot)$ — нечетное отображение.

ТЕОРЕМА 7.35. *Для любого компакта $E \subset D$*

$$\|\eta(d_0, d_1, \dots, d_n)(\cdot) - \eta(c_0, c_1, \dots, c_n)(\cdot)\|_{C(E)} \rightarrow 0$$

при $(d_0, d_1, \dots, d_n) \rightarrow (c_0, c_1, \dots, c_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности отображения ξ достаточно доказать утверждение теоремы лишь для граничных точек. Пусть $d^* = (d_0^*, d_1^*, \dots, d_n^*)$ и $c^* = (c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*)$ — граничные точки и им соответствуют произведения Бляшке

$$B_k(z) = \lambda \prod_{j=1}^k \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z}, \quad B_l(z) = \mu \prod_{j=1}^l \frac{z - \beta_j}{1 - \bar{\beta}_j z}, \quad |\lambda| = |\mu| = 1, \quad k, l \leq n.$$

Имеем

$$(7.31) \quad |B_k(z) - B_l(z)| = \frac{|Q(z)|}{\prod_{j=1}^k |1 - \bar{\alpha}_j z| \prod_{j=1}^l |1 - \bar{\beta}_j z|} \geq |Q(z)|,$$

где

$$Q(z) = \lambda \prod_{j=1}^k (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^l (1 - \bar{\beta}_j z) - \mu \prod_{j=1}^l (z - \beta_j) \prod_{j=1}^k (1 - \bar{\alpha}_j z).$$

Пусть $|c^* - d^*| < \varepsilon$. Тогда $|c_j^* - d_j^*| < \varepsilon$, $j = 0, 1, \dots, n$. Следовательно,

$$|B_k(z_j) - B_l(z_j)| = |c_j^* - d_j^*| < \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Из (7.31) вытекает, что $|Q(z_j)| < \varepsilon$, $j = 0, 1, \dots, n$. Легко убедиться из вида $Q(\cdot)$, что для любого $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, справедливо равенство

$$\overline{Q}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\frac{Q(z)}{\lambda\mu z^{k+l}}.$$

Точки $z_j \in (-1, 1)$, $j = 0, 1, \dots, n$, по условию все различные. Без ограничения общности можно считать, что $z_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\left|Q\left(\frac{1}{z_j}\right)\right| = \frac{|Q(z_j)|}{|z_j|^{k+l}} < \frac{\varepsilon}{\rho^n}, \quad \rho = \min_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Степень многочлена $Q(\cdot)$ равна $m + l \leq 2n$. Поэтому его можно записать через интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполируя в $2n + 1$ -ой точке $z_0, z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}$

$$Q(z) = \sum_{j=0}^n l_j(z)Q(z_j) + \sum_{j=1}^n l_{j+n}(z)Q(z_j^{-1}).$$

Положив

$$M_j = \sup_{z \in E} |l_j(z)|, \quad j = 0, 1, \dots, 2n,$$

получим

$$(7.32) \quad \|Q(\cdot)\|_{C(E)} < \max_{0 \leq j \leq 2n} M_j \frac{\varepsilon}{\rho^n}.$$

Положим

$$r = \max_{z \in E} |z|.$$

Тогда $|1 - \gamma z| \geq 1 - r$ для любого $\gamma \in D$. Из (7.31) и (7.31) получаем

$$\|B_k(\cdot) - B_l(\cdot)\|_{C(E)} \leq \frac{\|Q(\cdot)\|_{C(E)}}{(1-r)^{2n}} < C\varepsilon,$$

где

$$C = \frac{1}{\rho^n(1-r)^{2n}} \max_{0 \leq j \leq 2n} M_j.$$

□

7.8. Неравенство Фейера–Рисса

ТЕОРЕМА 7.36 (Неравенство Фейера–Рисса). *Для всех $f \in \mathcal{H}_p$, $0 < p < \infty$,*

$$(7.33) \quad \int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Предположим, что $f(\cdot)$ вещественна на вещественной оси. Тогда по теореме Коши для интеграла по границе верхнего полуокруга радиуса $r < 1$ будем иметь

$$\int_{-r}^r f^2(x) dx + i \int_0^\pi f^2(re^{i\theta})e^{i\theta} d\theta = 0.$$

Отсюда

$$\int_{-r}^r f^2(x) dx \leq \int_0^\pi |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Складывая это неравенство с аналогичным, полученным для нижнего полуокруга, получаем

$$2 \int_{-r}^r f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Из теоремы 7.23 и (7.23) получаем

$$2 \int_{-r}^r f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Устремляя $r \rightarrow 1$, получаем доказываемое неравенство.

Произвольная функция из $\mathcal{H}_2$ может быть представлена в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = g(z) + ih(z),$$

где $g(\cdot), h(\cdot) \in \mathcal{H}_2$ и вещественны на вещественной оси. Тогда по доказанному

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx &= \int_{-1}^1 g^2(x) dx + \\ &+ \int_{-1}^1 h^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} (h(e^{i\theta})g(e^{-i\theta}) - g(e^{i\theta})h(e^{-i\theta})) d\theta. \end{aligned}$$

Последний интеграл в силу нечетности подынтегральной функции равен нулю. Тем самым для $p = 2$ неравенство (7.33) доказано.

Если $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ и не имеет нулей в D , то $f^{p/2}(\cdot) \in \mathcal{H}_2$. Применяя доказанное для $p = 2$ неравенство, получаем (7.33). Если $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ имеет нули в D , то воспользуемся представлением $f(\cdot) = B(\cdot)g(\cdot)$ (см. теорему 7.28), где $B(\cdot)$ — произведение Бляшке, а $g(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ и не имеет нулей в D . Тогда

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \leq \int_{-1}^1 |g(x)|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

□

7.9. Теоремы отделимости

Пусть A и B — непустые подмножества нормированного пространства X . Говорят, что ненулевой функционал $x^* \in X^*$ отделяет множества A и B , если

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle.$$

Если неравенство строгое, то говорят, что x^* строго отделяет A и B .

Пусть число $\gamma \in \mathbb{R}$ таково, что

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \gamma \leq \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle.$$

Тогда, геометрически, отделимость множеств A и B означает, что они расположены по разные стороны от гиперплоскости

$$\{x \in X : \langle x^*, x \rangle = \gamma\}.$$

Если A — некоторое множество из X , то точка $\hat{x} \in A$ называется внутренней точкой A , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(\hat{x}) \subset A$. Множество внутренних точек A обозначается через $\text{int } A$.

Напомним формулировку первой теоремы отделимости (см. [45, стр. 243]).

ТЕОРЕМА 7.37 (Первая теорема отделимости). Пусть A и B — непустые выпуклые подмножества нормированного пространства X , причем $\text{int } A \neq \emptyset$ и $B \cap \text{int } A = \emptyset$. Тогда множества A и B отделимы.

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 7.38 (Вторая теорема отделимости). *Пусть A — непустое замкнутое выпуклое подмножество нормированного пространства X и $\hat{x} \notin A$. Тогда множества A и $\hat{x}$ строго отделимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A замкнуто, то дополнение к A открыто и поэтому существует такое $r > 0$, что открытый шар $B_X(\hat{x}, r)$ не пересекается с A . Тогда по первой теореме отделимости существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$ такой, что

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in B_X(\hat{x}, r)} \langle x^*, x \rangle.$$

Но

$$\inf_{x \in B_X(\hat{x}, r)} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle,$$

так как ненулевой линейный непрерывный функционал не может достигать точной нижней грани во внутренней точке. Следовательно, множества A и $\hat{x}$ строго отделимы. $\square$

7.10. Аффинные подпространства

Подмножество $Y \subset X$ называется аффинным подпространством X , если для любых $x, y \in Y$ точка $(1 - \alpha)x + \alpha y \in Y$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Аффинной комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$ называется точка

$$(7.34) \quad x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.39. *Если Y — аффинное подпространство, то любая аффинная комбинация точек $x_1, \dots, x_n \in Y$ принадлежит Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу точек. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для любой аффинной комбинации из не более, чем $n - 1$ точек. Пусть имеется точка x вида (7.34) и $n > 1$. Среди $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ найдется отличное от единицы. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 1$. Положим

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^n \tilde{\alpha}_j = 1,$$

из предположения индукции вытекает, что

$$\tilde{x} = \sum_{j=2}^n \tilde{\alpha}_j x_j \in Y.$$

Тогда из того, что Y аффинное подпространство следует, что

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \tilde{x} \in Y.$$

$\square$

Множество всех аффинных комбинаций точек из множества A называется аффинной оболочкой $\text{aff } A$ множества A

$$\text{aff } A = \left\{ x \in X : x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \ x_1, \dots, x_n \in A, \ \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.40. Каждое аффинное подпространство $Y \subset X$ представляется в виде $Y = a + L_Y$, где a — произвольная точка из Y , а L_Y — линейное подпространство из X , причем L_Y определено однозначно (не зависит от a).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in Y$. Положим

$$L_Y = \{x \in X : x = y - a, \quad y \in Y\}.$$

Докажем, что L_Y — линейное подпространство X . Пусть $x \in L_Y$. Тогда $x = y - a$, где $y \in Y$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу того, что $\lambda y + (1 - \lambda)a \in Y$, имеем

$$\lambda x = \lambda(y - a) = \lambda y + (1 - \lambda)a - a \in L_Y.$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in L_Y$ и $x_1 = y_1 - a$, а $x_2 = y_2 - a$, где $y_1, y_2 \in Y$. Так как $(y_1 + y_2)/2 \in Y$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} - a \in L_Y.$$

Из доказанного выше, положив $\lambda = 2$, получаем, что $x_1 + x_2 \in L_Y$.

Положим

$$M_Y = \{x \in X : x = y - b, \quad y \in Y\},$$

где $b \in Y$. В силу того, что $b - a \in L_Y$, имеем

$$b + L_Y = a + (b - a) + L_Y = a + L_Y = Y.$$

Следовательно, $M_Y = L_Y$. □

Размерностью аффинного подпространства Y называется размерность соответствующего линейного подпространства L_Y :

$$\dim Y = \dim L_Y.$$

Размерностью произвольного множества A называется размерность его аффинной оболочки $\text{aff } A$:

$$\dim A = \dim \text{aff } A.$$

Поскольку $\text{co } A \subset \text{aff } A$, то

$$\dim A = \dim \text{co } A = \dim \text{aff } A.$$

7.11. Теорема Каратеодори

ТЕОРЕМА 7.41 (Каратеодори). Если $\dim \text{co } A = d$, то любой элемент множества $\text{co } A$ представляется в виде выпуклой комбинации не более, чем $d + 1$ элемента множества A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Y = \text{aff } A$. Тогда $\dim Y = d$. Пусть

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad n \geq d + 2, \quad x_j \in A.$$

Тогда элементы $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$ принадлежат линейному пространству L_Y (см. предложение 7.40), размерность которого d . Следовательно, они линейно зависимы. Тем самым существуют $\beta_2, \dots, \beta_n$, не все равные нулю, для которых

$$\sum_{j=2}^n \beta_j (x_j - x_1) = 0.$$

Положим

$$\gamma_1 = - \sum_{j=2}^n \beta_j, \quad \gamma_j = \beta_j, \quad j = 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j = 0,$$

причем $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ не все равны нулю. Следовательно, среди чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ существуют отрицательные числа. Пусть

$$a = \min \left\{ -\frac{\alpha_j}{\gamma_j} : \gamma_j < 0 \right\} = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k}.$$

Тогда $\alpha_j + a\gamma_j \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Кроме того,

$$x = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + a\gamma_j) x_j, \quad \sum_{j=1}^n (\alpha_j + a\gamma_j) = 1.$$

Так как $\alpha_k + a\gamma_k = 0$, то x представляется в виде выпуклой комбинации из $n - 1$ точек. Если $n - 1 > d + 1$, то продолжая этот процесс придем к тому, что x представляется в виде выпуклой комбинации не более, чем $d + 1$ элемента множества A . $\square$

7.12. Аффинная независимость. Симплексы

Пусть X — линейное пространство. Векторы $x_1, \dots, x_{k+1} \in X$ называются аффинно независимыми, если из того, что

$$(7.35) \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 0,$$

следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.42. Векторы $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно независимы в том и только в том случае, если векторы $x_j - x_1$, $2 \leq j \leq k + 1$, — линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно независимы и

$$(7.36) \quad \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j (x_j - x_1) = 0.$$

Тогда

$$(7.37) \quad \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j x_j - \left(\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j \right) x_1 = 0.$$

Из аффинной независимости $x_1, \dots, x_{k+1}$ вытекает, что $\lambda_2 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$.

Пусть теперь векторы $x_j - x_1$, $2 \leq j \leq k + 1$, — линейно независимы и выполняются условия (7.35). Тогда имеет место равенство (7.37), которое эквивалентно равенству (7.36). Из линейной независимости векторов $x_j - x_1$, $2 \leq j \leq k + 1$, получаем, что $\lambda_2 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$. Кроме того,

$$\lambda_1 = - \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j = 0.$$

$\square$

Выпуклая оболочка аффинно независимых векторов $x_1, \dots, x_{k+1}$ называется k -мерным симплексом, а векторы $x_1, \dots, x_{k+1}$ — вершинами симплекса. Любой вектор из этого симплекса единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k+1.$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ называются барицентрическими координатами вектора x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.43. Пусть X — линейное пространство размерности d . Для любой точки $x \in X$ найдется d -мерный симплекс, содержащий некоторую окрестность x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_1, \dots, e_d$ — базис пространства X . Рассмотрим d -мерный симплекс A с вершинами в точках $0, e_1, \dots, e_d$ и точку

$$\tilde{x} = \frac{1}{d+1} \sum_{j=1}^d e_j.$$

Очевидно, что $\tilde{x} \in A$. Функция

$$\varphi(\xi) = \left\| \sum_{j=1}^d \xi_j e_j \right\|_X, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,$$

непрерывна на единичной сфере $\mathbb{R}^d$ и в силу теоремы Вейерштрасса достигает минимума на ней, который обозначим через $m > 0$. Тем самым имеет место неравенство

$$(7.38) \quad \left\| \sum_{j=1}^d \xi_j e_j \right\|_X \geq m \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right)^{1/2}.$$

Положим для $x \in X$ и $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(\hat{x}) = \{x \in X : \|x - \hat{x}\|_X < \varepsilon\}.$$

Если

$$x_\xi = \sum_{j=1}^d \xi_j e_j \in B_\varepsilon(0),$$

то из неравенства (7.38) получаем

$$|\xi_j| \leq \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Выберем $\varepsilon < m/(d(d+1))$. Тогда для всех $x_\xi \in B_\varepsilon(0)$ имеем

$$\tilde{x} + x_\xi = \sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{d+1} + \xi_j \right) e_j.$$

Из того, что

$$\frac{1}{d+1} + \xi_j > \frac{1}{d+1} - \frac{\varepsilon}{m} > \frac{d-1}{d(d+1)} \geq 0,$$

а

$$\sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{d+1} + \xi_j \right) < \frac{d}{d+1} + d \frac{\varepsilon}{m} < 1,$$

вытекает, что симплекс A содержит шар $B_\varepsilon(\tilde{x})$. Сдвинув симплекс A на вектор $x - \tilde{x}$, получим d -мерный симплекс с вершинами $a_0 = x - \tilde{x}$, $e_j + x - \tilde{x}$, $j = 1, \dots, d$, содержащий шар $B_\varepsilon(x)$. $\square$

7.13. Выпуклые функции

Мы будем рассматривать функции, которые принимают не только конечные значения. С этой целью вводится понятие расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Арифметические операции и неравенства для элементов расширенной прямой понимаются следующим образом: $-\infty < a < +\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $a + (\pm\infty) = \pm\infty$ для всех $a \in \mathbb{R}$,

$$a(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & a < 0, \end{cases}$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Пусть X — линейное пространство и $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Множества

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < +\infty\},$$

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x), x \in \text{dom } f\}$$

называются соответственно эффективным множеством и надграфиком (или эпиграфом) функции f . Функцию f называют собственной, если $\text{dom } f \neq \emptyset$ и $f(x) > -\infty$ при всех $x \in X$.

Функция $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется выпуклой, если ее надграфик выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in \text{dom } f$ и любого $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

которое называется неравенством Йенсена.

Если функция f выпукла тогда для любых $x_1, \dots, x_k \in \text{dom } f$ и любых $\alpha_j \geq 0$ таких, что

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$$

выполняется неравенство

$$(7.39) \quad f\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j f(x_j).$$

Докажем это неравенство по индукции. При $k = 2$ оно непосредственно вытекает из неравенства Йенсена. Пусть неравенство доказано для $k \leq n-1$. Докажем его для $k = n$. При $\alpha_1 = 1$ оно очевидно. Пусть $\alpha_1 < 1$. Положим

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1}, \quad j = 2, \dots, n, \quad \tilde{x} = \sum_{j=2}^n \tilde{\alpha}_j x_j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) &= f\left(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} x_j\right) = f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \tilde{x}) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f(\tilde{x}) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.44. Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство и $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция. Тогда f непрерывна в любой точке $\hat{x} \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем доказывать непрерывность в точке $\hat{x} = 0$. Пусть $\dim X = d$. Из предложения 7.43 следует, что существует d -мерный симплекс, содержащий некоторый шар $B_r(0)$. Если $a_0, a_1, \dots, a_d$ — вершины этого симплекса, то для всех точек $x \in B_r(0)$, учитывая (7.39), имеем

$$|f(x)| = |f(\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_d a_d)| \leq |\alpha_0 f(a_0) + \dots + \alpha_d f(a_d)| \leq C, \quad C = \max_{0 \leq j \leq d} |f(a_j)|.$$

Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$, а $x \in B_r(0)$. Тогда

$$f(\varepsilon x) = f(\varepsilon x + (1 - \varepsilon)0) \leq \varepsilon f(x) + (1 - \varepsilon)f(0).$$

Отсюда

$$(7.40) \quad f(\varepsilon x) - f(0) \leq \varepsilon(f(x) - f(0)) \leq \varepsilon(C - f(0)).$$

Кроме того,

$$f(0) = f\left(\frac{1}{\varepsilon+1}\varepsilon x + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}(-x)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon+1}f(\varepsilon x) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}f(-x).$$

Следовательно,

$$(\varepsilon + 1)f(0) \leq f(\varepsilon x) + \varepsilon f(-x).$$

Тем самым

$$f(\varepsilon x) - f(0) \geq \varepsilon(f(0) - f(-x)) \geq \varepsilon(f(0) - C).$$

Из этого неравенства, учитывая (7.40), получаем

$$|f(\varepsilon x) - f(0)| \leq \varepsilon(C - f(0)).$$

Для всех $y \in B_{\varepsilon r}(0)$ $y/\varepsilon \in B_r(0)$, поэтому

$$|f(y) - f(0)| = |f(\varepsilon(y/\varepsilon)) - f(0)| \leq \varepsilon(C - f(0)).$$

Из этого неравенства следует непрерывность функции f в нуле. $\square$

7.14. Двойственность выпуклых функций

Функция $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется замкнутой, если множество $\text{epi } f$ замкнуто в $X \times \mathbb{R}$.

Напомним, что функция $a(x) = \langle x^*, x \rangle + \alpha$, где $x^* \in X^*$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, называется аффинной.

ТЕОРЕМА 7.45 (о поточечной верхней грани аффинных функций). *Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является выпуклой и замкнутой тогда и только тогда, когда она есть поточечная верхняя грань аффинных функций, не превосходящих f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f — поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, то ее надграфик есть пересечение надграфиков этих функций, которые, очевидно, выпуклы и замкнуты и поэтому функция f выпукла и замкнута.

Обратно, пусть функция f выпукла и замкнута. Если $f(x) \equiv +\infty$, то она есть, например, поточечный предел констант. Пусть функция f не равна тождественно $+\infty$ и $x_0 \in X$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_0 < f(x_0)$. Ясно, что $(x_0, \alpha_0) \notin \text{epi } f$. По второй теореме отделимости (теорема 7.38) найдется $x^* \in X^*$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$(7.41) \quad \sup_{(x, \alpha) \in \text{epi } f} (\langle x^*, x \rangle + \gamma \alpha) < \langle x^*, x_0 \rangle + \gamma \alpha_0.$$

Заметим, что $\gamma \leq 0$, ибо в противном случае, увеличивая α , пришли бы к противоречию с неравенством (7.41).

Пусть $f(x_0) < +\infty$. Подставляя точку $(x_0, f(x_0)) \in \text{epi } f$ в (7.41), получаем, что $\gamma(\alpha_0 - f(x_0)) > 0$. Но $\alpha_0 - f(x_0) < 0$ и поэтому в данном случае $\gamma < 0$. Можно считать, что $\gamma = -1$ (делая, если необходимо, обе части неравенства (7.41) на $-\gamma$). Тогда, обозначая через c верхнюю грань в (7.41), это неравенство можно записать в виде двух неравенств

$$(7.42) \quad \langle x^*, x_0 \rangle - c > \alpha_0, \quad \langle x^*, x \rangle - c \leq \alpha \quad \forall (x, \alpha) \in \text{epi } f.$$

Рассмотрим аффинную функцию $a(x) = \langle x^*, x \rangle - c$. Если $f(x) = +\infty$, то, очевидно, $a(x) < f(x)$. Если $f(x) < +\infty$, то из второго неравенства в (7.42) при $\alpha = f(x)$ следует, что $a(x) \leq f(x)$. Таким образом, это неравенство выполняется для всех $x \in X$. Из первого неравенства в (7.42) следует, что $\alpha_0 < a(x_0)$, и значит, $\alpha_0 < a(x_0) \leq f(x_0)$. Выбирая α_0 сколь угодно близко к $f(x_0)$, получаем, что во всех точках, где функция f конечна, она есть поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, не превосходящих f .

Пусть теперь $f(x_0) = +\infty$. Для доказательства теоремы в этом случае надо для любого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ построить аффинную функцию, не превосходящую f , значение которой в точке x_0 больше α_0 . Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Если в (7.41) $\gamma < 0$ (как и выше, считаем тогда, что $\gamma = -1$), то из (7.42) вытекает, что $a(x_0) = \langle x^*, x_0 \rangle - c > \alpha_0$ и все доказано. Если же $\gamma = 0$ (отделяющая гиперплоскость “вертикальна”), то (7.41) запишется так

$$(7.43) \quad \langle x^*, x_0 \rangle - c > 0, \quad \langle x^*, x \rangle - c \leq 0 \quad \forall (x, \alpha) \in \text{epi } f.$$

По доказанному выше существует аффинная функция a , которая всюду не превосходит f . Для каждого $\mu > 0$ рассмотрим аффинную функцию $a_\mu(x) = a(x) + \mu(\langle x^*, x \rangle - c)$. Из второго неравенства в (7.43) следует, что эта функция также всюду не превосходит f , а из первого, что $a_\mu(x_0) = a(x_0) + \mu(\langle x^*, x_0 \rangle - c) > \alpha_0$ для достаточно больших μ . Итак, f есть поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, ее не превосходящих. $\square$

7.15. Интегральное неравенство Йенсена

ТЕОРЕМА 7.46 (неравенство Йенсена). Пусть $v(\cdot) \in L_1(T, \mu)$, где μ — вероятностная мера ($\mu(T) = 1$), а $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда

$$(7.44) \quad \varphi\left(\int_T v(x) d\mu(x)\right) \leq \int_T \varphi(v(x)) d\mu(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 7.44 вытекает, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна. Следовательно, она замкнута. Кроме того, $\varphi(v(\cdot))$ — измерима (см. [45, стр. 266]). В силу выпуклости и замкнутости $\varphi(\cdot)$ она является поточечной верхней гранью аффинных функций (см. теорему 7.45). Тем самым для всех $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t_0) = \sup\{at_0 + b : at + b \leq \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$$

Пусть $at + b \leq \varphi(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда рассмотрим измеримую функцию

$$g(x) = \varphi(v(x)) - av(x) - b \geq 0.$$

Если

$$\int_T g(x) d\mu(x) = +\infty,$$

то и

$$\int_T \varphi(v(x)) d\mu(x) = +\infty.$$

Поэтому неравенство (7.44) очевидным образом выполнено. В противном случае $\varphi(v(\cdot))$ — интегрируемая функция, и

$$a \int_T v(x) d\mu(x) + b = \int_T (av(x) + b) d\mu(x) \leq \int_T \varphi(v(x)) d\mu(x).$$

Переходя в левой части к точной верхней грани, получаем (7.44). $\square$

7.16. Неравенство Юнга для сверток

ТЕОРЕМА 7.47. Пусть $1 \leq q \leq \infty$, $f(\cdot) \in L_1(\mathbb{T})$ и $g(\cdot) \in L_q(\mathbb{T})$. Тогда

$$(7.45) \quad \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})} \leq \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \|g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q &\leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t - \theta)| |g(\theta)| d\theta \right)^q dt \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} (|f(t - \theta)| |g(\theta)|^q)^{1/q} |f(t - \theta)|^{1-1/q} d\theta \right)^q dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (|f(t - \theta)| |g(\theta)|^q)^{1/q} |f(t - \theta)|^{1-1/q} d\theta \\ \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t - \theta)| |g(\theta)|^q d\theta \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t - \theta)| d\theta \right)^{1-1/q} \\ = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t - \theta)| |g(\theta)|^q d\theta \right)^{1/q} \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{1-1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q &\leq \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{q-1} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t - \theta)| |g(\theta)|^q d\theta \right) dt \\ &= \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{q-1} \int_{\mathbb{T}} \left(|g(\theta)|^q \int_{\mathbb{T}} |f(t - \theta)| dt \right) d\theta = \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{q-1} \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \|g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q \\ &= \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^q \|g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q. \end{aligned}$$

$\square$

7.17. Неравенства для последовательностей

Пусть $a_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.48. Если $0 < p \leq q$, то

$$\left(\sum_{k=1}^N a_k^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что

$$\sum_{k=1}^N a_k^p > 0$$

(в противном случае $a_1 = \dots = a_N = 0$ и утверждение предложения очевидно справедливо). Положим

$$\alpha_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right)^{1/p}}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^p = 1.$$

Поэтому $\alpha_k \leq 1$, $k = 1, \dots, N$. Следовательно, $\alpha_k^q \leq \alpha_k^p$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^q \leq \sum_{k=1}^N \alpha_k^p = 1.$$

Тем самым

$$\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^q \right)^{1/q} \leq 1.$$

Это означает, что

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^N a_k^q \right)^{1/q}}{\left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right)^{1/p}} \leq 1.$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает доказываемое неравенство. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 7.49. Если $q \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^N a_k^q \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^q.$$

Пусть $a_k, b_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.50. Если $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$, то

$$\sum_{k=1}^N a_k^\alpha b_k^\beta \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^N b_k \right)^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то очевидно, что неравенство обращается в равенство. Предположим, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Положим $p = 1/\alpha$, $q = 1/\beta$. Тогда $p > 1$, $q > 1$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Положим

$$t_k = a_k^\alpha, \quad s_k = b_k^\beta.$$

По неравенству Гельдера имеем

$$\sum_{k=1}^N t_k s_k \leq \left(\sum_{k=1}^N t_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^N s_k^q \right)^{1/q}.$$

Возвращаясь к последовательностям $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, получаем доказываемое неравенство. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.51. Если $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^N a_k^\alpha b_k^\beta \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^N b_k \right)^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Тогда из предложения 7.51 и следствия 7.49 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k^\alpha b_k^\beta &= \sum_{k=1}^N \left(a_k^{\alpha+\beta}\right)^{\alpha'} \left(b_k^{\alpha+\beta}\right)^{\beta'} \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^{\alpha+\beta}\right)^{\alpha'} \left(\sum_{k=1}^N b_k^{\alpha+\beta}\right)^{\beta'} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^{(\alpha+\beta)\alpha'} \left(\sum_{k=1}^N b_k\right)^{(\alpha+\beta)\beta'} = \left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^N b_k\right)^\beta. \end{aligned}$$

□

СЛЕДСТВИЕ 7.52. Если $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 1$, а ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha b_k^\beta \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)^\beta.$$

Дополнение II. Эллиптические функции

8.1. Периоды мероморфных функций

Будем рассматривать функции комплексного переменного. Число T такое, что для всех значений z из области определения выполняется равенство

$$f(z + T) = f(z),$$

называется *периодом* функции $f(\cdot)$. *Тривиальным периодом* называется период $T = 0$. Функция $f(\cdot)$ называется *периодической*, если у нее существует нетривиальный период.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Если $T_1, \dots, T_k$ — периоды функции $f(\cdot)$, то

$$T = n_1 T_1 + \dots + n_k T_k$$

также период этой функции для любых $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n_j \geq 0$, то очевидно, что $f(z + n_j T_j) = f(z)$. Пусть $n_j < 0$. Тогда достаточно доказать, что $-T_j$ является периодом $f(\cdot)$. Имеем

$$f(z - T_j) = f(z - T_j + T_j) = f(z).$$

□

ЛЕММА 8.2. Множество периодов мероморфной функции $f(z) \not\equiv C$ не может содержать никакой последовательности, сходящейся к конечной точке плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существует последовательность периодов T_j , $j = 1, 2, \dots$, сходящаяся к конечной точке T , и z_0 — точка из области определения $f(\cdot)$. Сходящаяся к нулю последовательность $\tilde{T}_j = T_{j+1} - T_j$ является последовательностью периодов. Поэтому $f(z_0 + \tilde{T}_j) = f(z_0)$. Последовательность $z_0 + \tilde{T}_j$ сходится к точке z_0 и в точках этой последовательности $f(\cdot)$ принимает одно и то же значение. По теореме единственности отсюда следует, что $f(z) \equiv C$, а это противоречит условию утверждения. □

ТЕОРЕМА 8.3 (Абель). Для всякой периодической мероморфной функции $f(z) \not\equiv C$ существуют два периода τ и τ' такие, что любой период T функции $f(\cdot)$ имеет вид

$$T = n\tau + n'\tau',$$

где $n, n' \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_0 — какой-нибудь период $f(\cdot)$. В силу леммы 8.2 на отрезке $[0, T_0]$ существует лишь конечное число периодов. Обозначим через τ наименьший по модулю из них. Пусть L — прямая, проходящая через точки 0 и T_0 . Тогда точки $T = n\tau$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, лежащие на этой прямой, являются периодами функции $f(\cdot)$. Покажем, что других периодов на прямой

L нет. Предположим противное. Пусть T' — период функции $f(\cdot)$, который находится между периодами $n\tau$ и $(n+1)\tau$. Тогда $T' = (n+r)\tau$, где $0 < r < 1$. В силу предложения 8.1 точка

$$T'_0 = T' - n\tau = r\tau$$

является периодом $f(\cdot)$, а это противоречит тому, что τ наименьший по модулю период на L . Если у функции $f(\cdot)$ нет периодов, не лежащих на L , то теорема доказана.

Пусть у функции $f(\cdot)$ существует период T' , не лежащий на прямой L . Рассмотрим треугольник с вершинами 0 , τ , T' . Из предложения 8.1 следует, что в этом треугольнике может быть лишь конечное число периодов. Если в нем существует период T'' , не лежащий в вершинах треугольника, то заменим вершину T' на T'' . В силу того, что внутри отрезка $[0, \tau]$ периодов нет, получим-

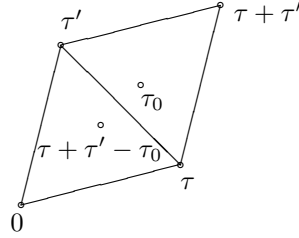


Рис. 8.1.1

ся нетривиальный треугольник, в котором периодов меньше, чем в исходном. Продолжая этот процесс, мы получим треугольник с вершинами 0 , τ , τ' , в котором нет периодов, кроме тех, которые находятся в вершинах. Построим этот треугольник до параллелограмма с вершинами 0 , τ , τ' , $\tau + \tau'$. Покажем, что в треугольнике τ , τ' , $\tau + \tau'$ нет периодов, кроме вершин. Действительно, если бы точка τ_0 из этого треугольника была бы периодом, то точка $\tau + \tau' - \tau_0$ принадлежала бы треугольнику с вершинами 0 , τ , τ' и была бы тоже периодом, а это противоречит построению треугольника с вершинами 0 , τ , τ' .

Пусть T — произвольный период функции $f(\cdot)$. Тогда его можно записать в виде

$$T = \alpha\tau + \beta\tau'.$$

Запишем α и β в виде

$$\alpha = n + r, \quad \beta = n' + r', \quad 0 \leq r, r' < 1.$$

Имеем

$$T = n\tau + n'\tau' + r\tau + r'\tau'.$$

Из предложения 8.1 следует, что точка $r\tau + r'\tau'$ является периодом $f(\cdot)$. Эта точка лежит в параллелограмме с вершинами 0 , τ , τ' , $\tau + \tau'$. Но в нем не содержится периодов кроме его вершин. Поэтому $r = r' = 0$. Тем самым

$$T = n\tau + n'\tau'.$$

□

Числа τ и τ' из доказанной теоремы называются *основными периодами* функции $f(\cdot)$. Таким образом, периодические мероморфные функции делятся на два класса: *одноперiodические*, у которых один основной период ($\tau' = 0$) и *двоякопериодические*, имеющие два основных периода. Двоякопериодические мероморфные функции называются *эллиптическими*.

8.2. Общие свойства эллиптических функций

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — эллиптические функции с периодами τ и τ' . Тогда функции

$$f(\cdot) \pm g(\cdot), \quad f(\cdot)g(\cdot), \quad \frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}, \quad f'(\cdot),$$

являются также эллиптическими с теми же периодами.

Доказательство этого утверждения вытекает из того, что свойства мероморфности и периодичности при указанных операциях не меняются.

Будем рассматривать эллиптические функции с основными периодами τ и τ' . Условимся считать, что отношение τ'/τ имеет положительную мнимую часть. Возьмем в комплексной плоскости некоторую точку c и построим параллелограмм с вершинами $c, c + \tau, c + \tau + \tau', c + \tau'$. В силу условий на τ и τ' переход от вершине к вершине, соответствующий написанному порядку вершин, отвечает обходу границы параллелограмма в положительном направлении. Из четырех вершин к параллелограмму отнесем только вершину c , а из четырех сторон отнесем те, которые сходятся в точке c . Определенное таким образом точечное множество назовем *параллелограммом периодов*.

Начальная вершина c параллелограмма произвольна. Благодаря этому можно строить параллелограмм периодов так, чтобы на его сторонах функция не принимала каких-либо наперед указанных значений, например, не обращалась в бесконечность. Такой выбор параллелограмма периодов возможен, так как эллиптическая функция, как всякая мероморфная функция (отличная от постоянной), принимает в конечной области каждое свое значение конечное число раз.

ТЕОРЕМА 8.5 (Лиувилль). Если эллиптическая функция является целой, то она постоянна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такая эллиптическая функция должна быть ограничена в параллелограмме периодов. Тогда она ограничена во всей плоскости и, следовательно, постоянна. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8.6. Пусть эллиптические функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ с одними и теми же периодами имеют в параллелограмме периодов совпадающие нули и полюсы с учетом кратности. Тогда найдется постоянная C такая, что

$$f(\cdot) = Cg(\cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эллиптическую функцию $f(\cdot)/g(\cdot)$. У нее нет полюсов в параллелограмме периодов. Тем самым она является целой. По теореме 8.5 $f(\cdot)/g(\cdot) = C$. Отсюда вытекает утверждение следствия. $\square$

ТЕОРЕМА 8.7. Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех ее полюсов в параллелограмме периодов равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем параллелограмм периодов так, чтобы эллиптическая функция $f(\cdot)$ была регулярна на его сторонах. Тогда интеграл по контуру Γ этого параллелограмма по теореме Коши равен сумме вычетов $f(\cdot)$ относительно всех полюсов, лежащих внутри параллелограмма, умноженной на $2\pi i$. Имеем

(8.1)

$$\int_{\Gamma} f(u) du = \int_c^{c+\tau} f(u) du + \int_{c+\tau}^{c+\tau+\tau'} f(u) du + \int_{c+\tau+\tau'}^{c+\tau'} f(u) du + \int_{c+\tau'}^c f(u) du.$$

Сделав замену $u = v + \tau'$, получим

$$\int_{c+\tau+\tau'}^{c+\tau'} f(u) du = \int_{c+\tau}^c f(v + \tau') dv = - \int_c^{c+\tau'} f(v) dv.$$

Тем самым первый и третий интегралы в правой части (8.1) сокращаются. Аналогичная ситуация происходит со вторым и четвертым интегралом. Следовательно,

$$(8.2) \quad \int_{\Gamma} f(u) du = 0.$$

В силу определения параллелограмма периодов из двух параллельных сторон параллелограмма периодов принадлежит только одна. Поэтому доказанное утверждение справедливо и в том случае, когда функция имеет полюсы на границе параллелограмма. $\square$

Пусть функция $f(\cdot)$ аналитична внутри ограниченной области D всюду, кроме конечного числа полюсов, непрерывна на границе этой области Γ и не обращается на Γ в 0. Предположим, что $f'(\cdot)$ тоже непрерывна на Γ . Тогда известно (см., например, [50, стр. 88], что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(u)}{f(u)} du = N - P,$$

где N — полное число нулей, а P — полное число полюсов внутри области D . Применяя теорему 8.7 к эллиптической функции $f'(\cdot)/f(\cdot)$, получаем

ТЕОРЕМА 8.8. *Полное число полюсов эллиптической функции в параллелограмме периодов равно полному числу нулей.*

8.3. Эллиптический синус

Эллиптическим интегралом первого рода называется функция

$$(8.3) \quad F(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

где $k \in (0, 1)$ — параметр (берется та ветвь корня, которая на отрезке $[0, 1]$ принимает положительные значения). Когда точка $z = x$ движется по отрезку $[0, 1]$ от 0 до 1, интеграл

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

принимает положительные значения, изменяясь от 0 до значения

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

При переходе через точку $z = 1$ множитель $1 - x$ меняет знак. Так как рассматриваемая ветвь корня аналитична в верхней полуплоскости, то мы должны считать, что такой переход происходит в результате обхода точки $z = 1$ по малой полуокружности γ (см. рис. 8.3.2).

В результате такого обхода $\arg(1 - z)$ меняется от 0 до $-\pi$, а аргументы остальных множителей не меняются. Поэтому на отрезке $II = [1, 1/k]$ аргумент

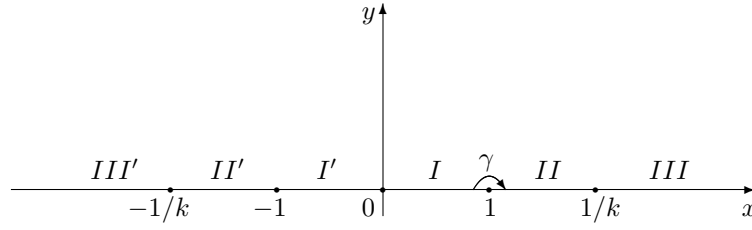


Рис. 8.3.2

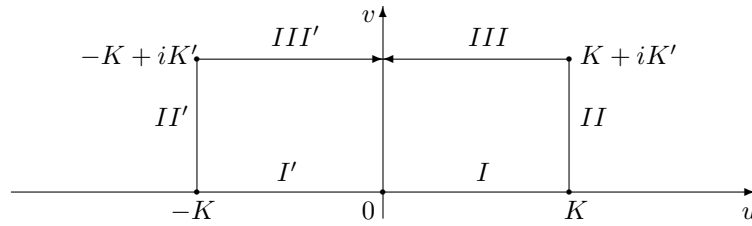


Рис. 8.3.3

корня равен $-\pi/2$, а аргумент подынтегрального выражения в (8.3) равен $\pi/2$. Тем самым значения $F(x, k)$ на отрезке II можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(x, k) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= K + i \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \end{aligned}$$

где в последнем интеграле корень принимает положительные значения. Следовательно, при движении точки x по отрезку $[1, 1/k]$ от 1 до $1/k$ точка $F(x, k)$ двигается по отрезку $[K, K + iK']$ от K до $K + iK'$, где

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Величина K называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* для модуля k . С помощью замены переменной $x = (1 - k'^2 t^2)^{-1/2}$, где $k' = \sqrt{1 - k^2}$, величина K' может быть записана в виде

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}}.$$

Тем самым K' есть тоже полный эллиптический интеграл первого рода, но для *дополнительного модуля* k' .

При переходе через точку $z = 1/k$ множитель $1 - kx$ меняет знак. Как и выше, можно убедиться в том, что рассматриваемая ветвь корня на луче $III = [1/k, +\infty)$ имеет аргумент $-\pi$, т.е. принимает отрицательные значения.

Таким образом, на этом луче

$$(8.4) \quad F(x, k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K + iK' - \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}},$$

где в последнем интеграле корень принимает положительные значения. Замена переменных $x = \frac{1}{k\xi}$ показывает, что

$$\int_{1/k}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = K.$$

Поэтому луч *III* функция $F(\cdot, k)$ преобразует в полуинтервал $[K + iK', iK']$.

Совершенно аналогично показывается, что $F(\cdot, k)$ гомеоморфно преобразует отрицательную полуось в левую половину контура прямоугольника, изображенного на рис. 8.3.3.

Применяя принцип соответствия границ, можно утверждать, что эллиптический интеграл первого рода $F(\cdot, k)$ реализует конформное отображение верхней полуплоскости на прямоугольник R_0 с вершинами $\pm K$, $\pm K + iK'$. Обозначим через

$$(8.5) \quad w = \operatorname{sn}(z, k)$$

(или, короче, $w = \operatorname{sn} z$) обращение интеграла

$$(8.6) \quad z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}.$$

Функция (8.5) называется *эллиптическим синусом*. Она является аналитической в прямоугольнике R_0 и отображает его на верхнюю полуплоскость.

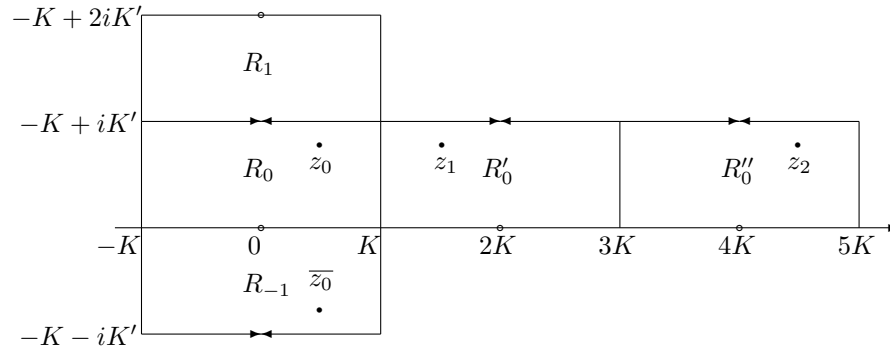


Рис. 8.3.4

Так как функция $\operatorname{sn} z$ переводит отрезок $[-K, K]$ в отрезок $[-1, 1]$, то к ней применим принцип симметрии, по которому она аналитически продолжается в прямоугольник R_{-1} , симметричный с R_0 относительно $[-K, K]$, причем продолженная функция (мы снова обозначаем ее через $\operatorname{sn} z$) отображает R_{-1} на нижнюю полуплоскость. Функция $\operatorname{sn} z$ переводит отрезок $[K, K + iK']$ в отрезок $[1, 1/k]$. К ней снова можно применить принцип симметрии, по которому она продолжается в прямоугольник R_1 , симметричный с R_0 относительно

$[K, K + iK']$, причем продолженная функция отображает R_1 тоже на нижнюю полуплоскость. Продолженную функцию можно продлить в прямоугольник R_2 .

Точно также мы можем продлить функцию $\operatorname{sn} z$ в прямоугольник R_1 . Только теперь продолженная функция будет мероморфной — в точке iK' она будет иметь полюс. Рассуждая таким же образом, мы можем продлить эллиптический синус на всю плоскость $\mathbb{C}$.

Отметим некоторые свойства полученной функции. В силу принципа симметрии точка z_1 из прямоугольника R_1 , симметричная точке z_0 относительно отрезка $[K, K + iK']$ переходит в точку $\overline{\operatorname{sn} z_0}$, а точка $z_2 = z_0 + 4K$, симметричная с z_1 относительно $[3K, 3K + iK']$ — снова в точку $\operatorname{sn} z_0$. Тем самым для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sn}(z + 4K) = \operatorname{sn} z.$$

Аналогично можно показать, что

$$\operatorname{sn}(z + 2iK') = \operatorname{sn} z.$$

Таким образом, построенная функция является эллиптической с основными периодами $4K$ и $2iK'$.

Точка $\overline{z_0}$, симметричная точке z_0 относительно отрезка $[-K, K]$ переходит в точку $\overline{\operatorname{sn} z_0}$. Следовательно, $\operatorname{sn} \overline{z_0} = \overline{\operatorname{sn} z_0}$. Было показано, что $\operatorname{sn} z_1 = \overline{\operatorname{sn} z_0}$. Но $z_1 = 2K - \overline{z_0}$. Тем самым $\operatorname{sn}(2K - \overline{z_0}) = \operatorname{sn} \overline{z_0}$. Отсюда для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sn}(2K - z) = \operatorname{sn} z.$$

Получим еще одно соотношение. Пусть $x \in [1/k, +\infty)$. Тогда из (8.4) следует, что

$$\begin{aligned} z &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &\quad + \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= K + iK' - \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} \end{aligned}$$

Сделав в последнем интеграле замену $x = \frac{1}{k\xi}$, получаем

$$z = K + iK' + \int_1^{\frac{1}{kx}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = iK' + \int_0^{\frac{1}{kx}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}.$$

Отсюда получаем $x = \operatorname{sn} z$ и

$$\frac{1}{kx} = \operatorname{sn}(z - iK') = \operatorname{sn}(z + iK').$$

В силу мероморфности функции $\operatorname{sn} z$ для всех $z \in \mathbb{C}$ (кроме нулей $\operatorname{sn} z$) справедливо равенство

$$(8.7) \quad \operatorname{sn}(z + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} z}.$$

Из (8.6) следует, что

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}.$$

Тем самым

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z)}.$$

В частности,

$$(\operatorname{sn} z)'|_{z=0} = 1.$$

Следовательно, нули функции $\operatorname{sn} z$ имеют кратность единица. В силу равенства (8.7) полюса этой функции также однократные.

Итак, выяснено, что функция $\operatorname{sn} z$ является эллиптической, имеет параллелограмм периодов с вершинами в точках $0, 4K, 2iK', 4K + 2iK'$ (напомним, что из него удалены отрезки $[4K, 4K + 2iK']$ и $[2iK', 4K + 2iK']$). В параллелограмме периодов у $\operatorname{sn} z$ два однократных нуля ($z = 0, 2K$) и два однократных полюса ($z = iK', 2K + iK'$).

8.4. Первое главное преобразование n -ой степени

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.9. *Имеет место равенство*

$$(8.8) \quad \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$f(z) = \operatorname{sn}(z+v)\operatorname{sn}(z-v), \quad g(z) = \frac{\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 v}.$$

В силу предложения 8.4 обе эти функции эллиптические с периодами $4K, 2iK'$ (на самом деле даже с периодом $2K$, но это не играет особого значения). Нули функции $f(\cdot)$ имеют вид $z = \pm v + 2Kn + 2iK'm$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Те же нули имеет функция $g(\cdot)$. Полюсы функции $f(\cdot)$ имеют вид $z = \pm v + 2Kn + (2m+1)iK'$, $n, m \in \mathbb{Z}$. В силу равенства (8.7) те же полюсы имеет функция $g(\cdot)$. Все нули и полюсы у этих функций кратности единица. Тогда из следствия 8.6 найдется постоянная C такая, что $f(z) = Cg(z)$. Подставив $z = 0$, убеждаемся, что $C = 1$. $\square$

Пусть модуль λ такой, что

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K}.$$

Положим

$$M = \frac{K'}{\Lambda'}.$$

Тогда

$$\Lambda = \frac{K}{nM}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \operatorname{sn}(t - t_j, k),$$

где

$$t_j = -K + \frac{2j+1}{n}K, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

и функцию

$$g(z) = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right).$$

Величины $4K$ и $2iK'$ являются периодами для обеих функций. Пусть $n = 2m+1$. Множество нулей функции $f(\cdot)$ имеет вид

$$-K + \frac{2j+1}{n}K + 2Ks + 2iK'r = 2\Lambda M(j - m + sn) + 2i\Lambda' Mr, \\ j = 0, 1, \dots, n-1, \quad s, r \in \mathbb{Z}.$$

Легко убедиться, что каждый такой нуль является нулем и для функции $g(\cdot)$. Для функции $g(\cdot)$ множество нулей таково:

$$2\Lambda Mp + 2i\Lambda' Mq = \frac{2K}{n}p + 2iK'q, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что каждый такой нуль является нулем функции $f(\cdot)$. Представим $p + m$ в виде $p + m = ns + r$, где $0 \leq r \leq n - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{n}p + 2iK'q - t_r, k\right) &= \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{n}p + K - \frac{2r+1}{n}K, k\right) \\ &= \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{n}(p + m - r), k\right) = \operatorname{sn}(2Ks, k) = 0. \end{aligned}$$

Займемся теперь полюсами этих функций. Полюсы $f(\cdot)$ имеют вид

$$\begin{aligned} -K + \frac{2j+1}{n}K + 2sK + (2r+1)iK' &= 2\Lambda M(j - m + sn) + i\Lambda' M(2r+1), \\ j &= 0, 1, \dots, n-1, \quad s, r \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждый из таких полюсов является полюсом функции $g(\cdot)$. Полюсы функции $g(\cdot)$ имеют вид

$$2\Lambda Mp + i\Lambda' M(2q+1) = \frac{2K}{n}p + iK'(2q+1), \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Как и выше, воспользуемся представлением $p + m = ns + r$. Тогда

$$(8.9) \quad \frac{2K}{n}p + iK'(2q+1) - t_r = 2Ks + iK'(2q+1),$$

а это точка является полюсом для $\operatorname{sn}(z, k)$. Для остальных множителей функции $f(\cdot)$ точка

$$\frac{2K}{n}p + iK'(2q+1)$$

не является нулем, т.к. на прямой $z = iK'$ у функции $\operatorname{sn}(z, k)$ нет нулей. Следовательно, точка (8.9) — полюс $f(\cdot)$.

Из следствия 8.6 получаем, что существует постоянная C такая, что $g(z) = Cf(z)$. Заметим, что $t_m = 0$ и $t_{m-j} = -t_{m+j}$, $j = 1, \dots, m$. Учитывая (8.8), имеем

$$f(z) = \operatorname{sn}(z, k) \prod_{j=m+1}^{2m} \frac{\operatorname{sn}^2(z, k) - \operatorname{sn}^2(t_j, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(t_j, k) \operatorname{sn}^2(z, k)}.$$

Таким образом, доказано, что существует постоянная C такая, что

$$(8.10) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, \lambda\right) = C \operatorname{sn}(z, k) \prod_{r=1}^m \frac{\operatorname{sn}^2(z, k) - c_{2r}^2}{1 - k^2 c_{2r}^2 \operatorname{sn}^2(z, k)},$$

где

$$c_r = \operatorname{sn}\left(\frac{rK}{n}, k\right).$$

Подставив $z = -iK'/2$ в (8.7), получим, что

$$(8.11) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{iK'}{2}, k\right) = \frac{i}{\sqrt{k}}.$$

Положив в (8.10) $z = iK'/2$, имеем

$$\frac{i}{\sqrt{\lambda}} = Ci \frac{(-1)^m}{k^{m+1/2}}.$$

Отсюда

$$C = (-1)^m \frac{k^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Итак, для $n = 2m + 1$ мы получили представление (нам удобнее z заменить на Kz)

$$(8.12) \quad \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(n\Lambda z, \lambda) = (-1)^m k^{n/2} \operatorname{sn}(Kz, k) \prod_{r=1}^m \frac{\operatorname{sn}^2(Kz, k) - c_{2r}^2}{1 - k^2 c_{2r}^2 \operatorname{sn}^2(Kz, k)}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $n = 2m$. Функцию $g(\cdot)$ определим следующим образом

$$g(z) = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M} + \Lambda, \lambda\right).$$

Множество нулей функции $f(\cdot)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$-K + \frac{2j+1}{n}K + 2Ks + 2iK'r = 2\Lambda M(j - m + sn) + \Lambda M + 2i\Lambda' Mr, \\ j = 0, 1, \dots, n-1, \quad s, r \in \mathbb{Z}.$$

Каждый такой нуль является нулем и для функции $g(\cdot)$. Для функции $g(\cdot)$ множество нулей таково:

$$\Lambda M(2p+1) + 2i\Lambda' Mq = \frac{K}{n}(2p+1) + 2iK'q, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что каждый такой нуль является нулем функции $f(\cdot)$. Представим $p + m$ в виде $p + m = ns + r$, где $0 \leq r \leq n-1$. Имеем

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{n}(2p+1) + 2iK'q - t_r, k\right) = \operatorname{sn}\left(\frac{K}{n}(2p+1) + K - \frac{2r+1}{n}K, k\right) \\ = \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{n}(p+m-r), k\right) = \operatorname{sn}(2Ks, k) = 0.$$

Займемся теперь полюсами этих функций. Полюсы $f(\cdot)$ имеют вид

$$-K + \frac{2j+1}{n}K + 2sK + (2r+1)iK' = 2\Lambda M(j - m + sn) + \Lambda M + i\Lambda' M(2r+1), \\ j = 0, 1, \dots, n-1, \quad s, r \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что каждый из таких полюсов является полюсом функции $g(\cdot)$. Полюсы функции $g(\cdot)$ имеют вид

$$\Lambda M(2p+1) + i\Lambda' M(2q+1) = \frac{K}{n}(2p+1) + iK'(2q+1), \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Как и выше, воспользуемся представлением $p + m = ns + r$. Тогда

$$(8.13) \quad \frac{K}{n}(2p+1) + iK'(2q+1) - t_r = 2Ks + iK'(2q+1),$$

а это точка является полюсом для $\operatorname{sn}(z, k)$. Для остальных множителей функции $f(\cdot)$ точка

$$\frac{K}{n}(2p+1) + iK'(2q+1)$$

не является нулем, т.к. на прямой $z = iK'$ у функции $\operatorname{sn}(z, k)$ нет нулей. Следовательно, точка (8.13) — полюс $f(\cdot)$.

Из следствия (8.6) получаем, что существует постоянная C такая, что $g(z) = Cf(z)$. Заметим, что $t_{m-j} = -t_{m+j}$, $j = 1, \dots, m$. Учитывая (8.8), имеем

$$f(z) = \prod_{j=m+1}^{2m} \frac{\operatorname{sn}^2(z, k) - \operatorname{sn}^2(t_j, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(t_j, k) \operatorname{sn}^2(z, k)}.$$

Таким образом, доказано, что существует постоянная C такая, что

$$(8.14) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M} + \Lambda, \lambda\right) = C \prod_{r=1}^m \frac{\operatorname{sn}^2(z, k) - c_{2r-1}^2}{1 - k^2 c_{2r-1}^2 \operatorname{sn}^2(z, k)}.$$

Подставив $z = K - iK'/2$ в (8.7), получим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(K + \frac{iK'}{2}, k\right) &= \frac{1}{k \operatorname{sn}\left(K - \frac{iK'}{2}, k\right)} = -\frac{1}{k \operatorname{sn}\left(\frac{iK'}{2} - K, k\right)} \\ &= \frac{1}{k \operatorname{sn}\left(\frac{iK'}{2} + K, k\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{sn}\left(K + \frac{iK'}{2}, k\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Положив в (8.14) $z = iK'/2$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C \frac{(-1)^m}{k^m}.$$

Таким образом, для $n = 2m$ мы получили представление (снова z заменим на Kz)

$$(8.15) \quad \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(n\Lambda z + \Lambda, \lambda) = (-1)^m k^{n/2} \prod_{r=1}^m \frac{\operatorname{sn}^2(Kz, k) - c_{2r-1}^2}{1 - k^2 c_{2r-1}^2 \operatorname{sn}^2(Kz, k)}.$$

8.5. Произведения Бляшке–Золотарева

Пусть $k \in (0, 1)$, а K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k . Функцию

$$Z_n(z, k) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - z_j z},$$

где

$$z_j = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(-K + \frac{2j-1}{n}K, k\right),$$

будем называть *произведением Бляшке–Золотарева*. Если $n = 2m + 1$, то $Z_n(\cdot, k)$ можно записать в виде

$$Z_n(z, k) = z \prod_{j=1}^m \frac{z^2 - u_j^2}{1 - u_j^2 z^2}, \quad u_j = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2j}{n}K, k\right).$$

При $n = 2m$ функция $Z_n(\cdot, k)$ записывается в виде

$$Z_n(z, k) = \prod_{j=1}^m \frac{z^2 - v_j^2}{1 - v_j^2 z^2}, \quad v_j = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2j-1}{n}K, k\right).$$

Подставляя $z = \sqrt{k} \operatorname{sn}(Kt, k)$, учитывая (8.12) и (8.15), получаем параметрическую запись для произведений Бляшке–Золотарева

$$Z_n(z, k) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(n\Lambda t + \Lambda, \lambda), & n = 2m, \\ (-1)^{(n-1)/2} \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(n\Lambda t, \lambda), & n = 2m + 1, \end{cases}$$

где λ определено равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K},$$

а Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ и $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$. Таким образом,

$$\|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} = \sqrt{\lambda}.$$

Важным свойством произведений Бляшке–Золотарева является наличие у них альтернанса, т.е. таких точек

$$\xi_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(-K + \frac{2j}{n} K, k \right), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

для которых

$$(8.16) \quad Z(\xi_j, k) = (-1)^j \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

8.6. Функция Вейрштрасса $\wp(\cdot)$

Рассмотрим ряд

$$(8.17) \quad \sum'_{n, n'} \frac{1}{|2n\omega + 2n'\omega'|^3},$$

где суммирование берется по всем целым n и n' , кроме пары $n = n' = 0$ (это отмечается штрихом у знака суммы), а числа ω и ω' таковы, что отношение ω'/ω не является действительным числом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.10. *Ряд (8.17) сходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$S_k = \sum_{n, n'} \frac{1}{|2n\omega + 2n'\omega'|^3},$$

где сумма распространяется на те n и n' , для которых

$$(8.18) \quad \begin{aligned} n &= \pm k, & -k < n' < k, \\ n' &= \pm k, & -k < n < k, \\ n &= \pm k, & n' = \pm k. \end{aligned}$$

Число пар (n, n') , удовлетворяющих условию (8.18), равно $8k$, при этом для таких пар

$$|2n\omega + 2n'\omega'| \geq kd,$$

где d наименьшее расстояние до начала координат среди точек

$$\pm 2\omega, \quad \pm(2\omega + 2\omega'), \quad \pm 2\omega', \quad \pm(2\omega - 2\omega').$$

Поэтому имеет место оценка

$$S_k \leq 8k \cdot \frac{1}{(kd)^3} = \frac{8}{d^3} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Тем самым ряд

$$\sum'_{n, n'} \frac{1}{|2n\omega + 2n'\omega'|^3} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$$

сходится. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.11. *Ряд*

$$\sum_{n, n'} \frac{1}{(u - 2n\omega - 2n'\omega')^3}$$

сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной области плоскости u , если из него удалить то конечное число членов, которые в этой области обращаются в бесконечность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим круг $|u| \leq R$. Удалим из ряда все слагаемые, для которых $|2n\omega + 2n'\omega'| \leq 2R$. Очевидно, что их конечное число. Для оставшихся слагаемых

$$|u - 2n\omega - 2n'\omega'| \geq |2n\omega + 2n'\omega'| - |u| \geq \frac{1}{2}|2n\omega + 2n'\omega'|.$$

Следовательно, для оставшихся слагаемых

$$\frac{1}{|u - 2n\omega - 2n'\omega'|^3} \leq \frac{8}{|2n\omega + 2n'\omega'|^3}.$$

Из сходимости ряда (8.17) вытекает утверждение предложения. $\square$

Положим

$$Q(u) = -2 \sum_{n,n'} \frac{1}{(u - 2n\omega - 2n'\omega')^3}.$$

Эта функция имеет периоды 2ω и $2\omega'$. Действительно,

$$Q(u + 2\omega) = -2 \sum_{n,n'} \frac{1}{(u + 2\omega - 2n\omega - 2n'\omega')^3} = -2 \sum_{m,n'} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n'\omega')^3},$$

где $m = n - 1$. Так как пара (m, n') пробегает ту же совокупность, что и пара (n, n') , то

$$Q(u + 2\omega) = Q(u).$$

Аналогично показывается, что

$$Q(u + 2\omega') = Q(u).$$

Функция $Q(\cdot)$ является нечетной. Действительно,

$$Q(-u) = 2 \sum_{n,n'} \frac{1}{(u + 2n\omega + 2n'\omega')^3} = 2 \sum_{n,n'} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^3},$$

где $m = -n$ и $m' = -n'$. Так как обе пары пробегают одну и ту же совокупность, то

$$Q(-u) = -Q(u).$$

Положим

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \int_0^u \left(Q(u) + \frac{2}{u^3} \right) du,$$

где путь интегрирования не проходит через вершины сетки периодов, отличные от точки $u = 0$. Таким образом,

$$\wp'(u) = Q(u).$$

Почленное интегрирование дает

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{n,n'} \left(\frac{1}{(u - 2n\omega - 2n'\omega')^2} - \frac{1}{(2n\omega + 2n'\omega')^2} \right).$$

Так как $Q(\cdot)$ — функция нечетная, то $\wp(\cdot)$ — функция четная.

Поскольку $Q(\cdot)$ имеет период 2ω , то

$$(8.19) \quad \wp'(u + 2\omega) = \wp'(u).$$

Значит,

$$(8.20) \quad \wp(u + 2\omega) = \wp(u) + c,$$

где c — константа. Положив в (8.20) $u = -\omega$, получим

$$\wp(\omega) = \wp(-\omega) + c.$$

Отсюда в силу четности $\wp(\cdot)$ вытекает, что $c = 0$, т.е.

$$\wp(u + 2\omega) = \wp(u).$$

Аналогично показывается, что

$$\wp(u + 2\omega') = \wp(u).$$

Таким образом, $\wp(\cdot)$ является эллиптической функцией, у которой в параллелограмме периодов один полюс второго порядка.

8.7. Дифференциальное уравнение для функции $\wp(\cdot)$

В окрестности точки $u = 0$ функция $\wp(\cdot)$ имеет вид

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum'_{n,n'} \frac{1}{(2n\omega + 2n'\omega')^4} + 5u^4 \sum'_{n,n'} \frac{1}{(2n\omega + 2n'\omega')^6} + \dots$$

Следуя Вейерштрассу, введем обозначения

$$g_2 = 60 \sum'_{n,n'} \frac{1}{(2n\omega + 2n'\omega')^4}, \quad g_3 = 140 \sum'_{n,n'} \frac{1}{(2n\omega + 2n'\omega')^6}.$$

В этих обозначениях

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \dots$$

Отсюда

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \wp'^2(u) &= \frac{4}{u^6} \left(1 - \frac{g_2}{10}u^4 - \frac{g_3}{7}u^6 + \dots \right), \\ \wp^3(u) &= \frac{1}{u^6} \left(1 + \frac{3g_2}{20}u^4 + \frac{3g_3}{28}u^6 + \dots \right). \end{aligned}$$

В силу этих разложений

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + g_2\wp(u) = -g_3 + Au^2 + Bu^4 + \dots$$

Левая часть полученного равенства есть эллиптическая функция с основными периодами τ и τ' . Ее полюсами могут быть только точки $n\tau + n'\tau'$. А так как в точке $u = 0$, как показывает написанная формула, эта функция регулярна и равна $-g_3$, то она регулярна во всяком параллелограмме периодов, для которого $u = 0$ есть внутренняя точка. Следовательно, по теореме Лиувилля она есть константа. Тем самым

$$(8.21) \quad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Иначе говоря, $\wp(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z'^2 = 4z^3 - g_2z - g_3.$$

Положим

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 &= -\frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3. \end{aligned}$$

Подставляя в равенство (8.19) $u = -\omega$, получаем

$$\wp'(\omega) = \wp'(-\omega).$$

В силу нечетности $\wp'(\cdot)$ отсюда следует, что $\wp(\omega) = 0$. Подобным образом можно показать, что

$$\wp'(\omega') = \wp'(\omega + \omega') = 0.$$

Тем самым точки ω , $\omega + \omega'$, ω' являются нулями $\wp'(\cdot)$ и притом простыми нулями, так как $\wp'(\cdot)$ — эллиптическая функция третьего порядка.

Заметим, что величины

$$(8.22) \quad \wp(\omega), \quad \wp(\omega + \omega'), \quad \wp(\omega')$$

все различны между собой. Действительно, если, например, $\wp(\omega) = \wp(\omega + \omega')$, то эллиптическая функция второго порядка $\wp(\cdot) - \wp(\omega)$ имела бы два нуля ω , $\omega + \omega'$ второго порядка, что невозможно.

В силу (8.21) величины (8.22) совпадают с корнями многочлена $4z^3 - g_2z - g_3$. Поэтому числа e_1, e_2, e_3 все различны между собой.

Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega, \\ \omega_2 &= -\omega - \omega' \quad \left(\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad \operatorname{Im} \tau > 0 \right), \\ \omega_3 &= \omega'. \end{aligned}$$

Заметим, что $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. В дальнейшем считаем, что

$$(8.23) \quad e_k = \wp(\omega_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

8.8. Функция Вейрштрасса $\zeta(\cdot)$

Функция $\zeta(\cdot)$ определяется следующим образом:

$$(8.24) \quad \zeta(u) = \frac{1}{u} - \int_0^u \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) du,$$

где путь интегрирования не проходит через вершины сетки периодов, отличные от точки $u = 0$. Таким образом,

$$(8.25) \quad \zeta'(u) = -\wp(u).$$

Почленное интегрирование дает

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{n, n'} \left(\frac{1}{u - 2n\omega - 2n'\omega'} + \frac{1}{2n\omega + 2n'\omega'} + \frac{u}{(2n\omega + 2n'\omega')^2} \right).$$

Из (8.24) следует, что $\zeta(\cdot)$ — нечетная функция. В силу (8.25)

$$(8.26) \quad \begin{aligned} \zeta(u + 2\omega) - \zeta(u) &= 2\eta, \\ \zeta(u + 2\omega') - \zeta(u) &= 2\eta', \end{aligned}$$

где η и η' — некоторые константы. Подставляя $u = -\omega$ в первое равенство и используя нечетность $\zeta(\cdot)$, получаем $\eta = \zeta(\omega)$. Аналогично находим, что $\eta' = \zeta(\omega')$. Будем использовать обозначения

$$\eta_k = \zeta(\omega_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Нетрудно видеть, что

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Действительно, в силу (8.26)

$$\zeta(u + 2\omega + 2\omega') = \zeta(u + 2\omega) + 2\eta = \zeta(u) + 2\eta + 2\eta'.$$

Полагая $u = -\omega - \omega'$, находим

$$\eta + \eta' = \zeta(\omega + \omega').$$

Следовательно,

$$\eta_1 + \eta_3 = -\eta_2.$$

Докажем, что

$$(8.27) \quad \eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

Напомним, что для определенности $\text{Im } \omega'/\omega > 0$. Рассмотрим какой-нибудь параллелограмм периодов с вершинами c , $c + 2\omega$, $c + 2\omega + 2\omega'$, $c + \omega'$, для которого точка $u = 0$ является внутренней. Интегрируя по контуру Γ этого параллелограмма, будем иметь

$$\begin{aligned} 2\pi i = \int_{\Gamma} \zeta(u) du &= \int_c^{c+2\omega} \zeta(u) du + \int_{c+2\omega}^{c+2\omega+2\omega'} \zeta(u) du \\ &\quad + \int_{c+2\omega+2\omega'}^{c+\omega'} \zeta(u) du + \int_{c+\omega'}^c \zeta(u) du. \end{aligned}$$

Делая в правой части во втором интеграле подстановку $u = 2\omega + v$, а в третьем интеграле подстановку $u = 2\omega' + v$, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_c^{c+2\omega} (\zeta(u) - \zeta(u + 2\omega')) du + \int_c^{c+2\omega'} (\zeta(u + 2\omega) - \zeta(u)) du \\ &= \int_c^{c+2\omega'} 2\eta du - \int_c^{c+2\omega} 2\eta' du = 4(\eta\omega' - \eta'\omega). \end{aligned}$$

Тем самым имеет место соотношение (8.27).

Соотношение (8.27) можно переписать в виде

$$(8.28) \quad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Подставляя в (8.28) $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$ и $\eta_3 = -\eta_1 - \eta_2$, получаем

$$\eta_1(-\omega_1 - \omega_2) - (-\eta_1 - \eta_2)\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Следовательно,

$$(8.29) \quad \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = -\frac{\pi i}{2}.$$

8.9. Функция Вейрштрасса $\sigma(\cdot)$

Определим функцию $\sigma(\cdot)$ равенством

$$(8.30) \quad \ln \frac{\sigma(u)}{u} = \int_0^u \left(\zeta(u) - \frac{1}{u} \right) du,$$

где путь интегрирования не проходит ни через одну вершину сетки периодов, отличную от точки $u = 0$. Из (8.30) следует, что

$$(8.31) \quad \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u).$$

Заменяя в (8.30) функцию $\zeta(\cdot)$ ее разложением на простейшие дроби и почленно интегрирую, получаем

$$\ln \frac{\sigma(u)}{u} = \sum'_{n,n'} \left(\ln \left(1 - \frac{u}{2n\omega + 2n'\omega'} \right) + \frac{u}{2n\omega + 2n'\omega'} + \frac{u^2}{2(2n\omega + 2n'\omega')^2} \right).$$

Отсюда вытекает следующее разложение функции $\sigma(\cdot)$ в бесконечное произведение

$$\sigma(u) = u \prod'_s \left(1 - \frac{u}{s} \right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}}, \quad s = 2n\omega + 2n'\omega'.$$

Из этого представления видно, что $\sigma(\cdot)$ — целая функция, имеющая лишь простые нули, лежащие в вершинах сетки периодов.

Из (8.30) вытекает, что $\sigma(\cdot)$ — нечетная функция.

Заменим в (8.31) u на $u + 2\omega$. В силу (8.26) получим

$$\frac{\sigma'(u + 2\omega)}{\sigma(u + 2\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta.$$

Отсюда

$$\ln \sigma(u + 2\omega) = \ln \sigma(u) + 2\eta u + C.$$

Следовательно,

$$\sigma(u + 2\omega) = C' e^{2\eta u} \sigma(u).$$

Полагая здесь $u = -\omega$, будем иметь

$$\sigma(\omega) = -\sigma(\omega) C' e^{-2\eta \omega}.$$

Так как $\sigma(\omega) \neq 0$, то $C' = -e^{2\eta \omega}$. Тем самым

$$(8.32) \quad \sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \sigma(u).$$

Легко показать, что вообще

$$(8.33) \quad \sigma(u + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(u+\omega_k)} \sigma(u).$$

8.10. Связь между функциями $\wp(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$. Функции $\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot), \sigma_3(\cdot)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.12. *Имеет место равенство*

$$(8.34) \quad \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$f(u) = \wp(u) - \wp(v), \quad g(u) = \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)},$$

где v фиксировано и не совпадает ни с одной вершиной сетки периодов 2ω и $2\omega'$. Функция $f(\cdot)$ — эллиптическая с периодами 2ω и $2\omega'$. Она имеет полюсы второго порядка в точках $2n\omega + 2n'\omega'$ и простые нули в точках $v + 2n\omega + 2n'\omega'$ и $-v + 2n\omega + 2n'\omega'$. Покажем, что функция $g(\cdot)$ является эллиптической функцией с теми же периодами. В силу (8.32) имеем

$$\sigma(u + 2\omega - v)\sigma(u + 2\omega + v) = e^{2\eta(2u+2\omega)} \sigma(u+v)\sigma(u-v).$$

Кроме того,

$$\sigma^2(u + 2\omega) = e^{2\eta(2u+2\omega)} \sigma^2(u).$$

Тем самым

$$g(u + 2\omega) = g(u).$$

Аналогично показывается, что

$$g(u + 2\omega') = g(u).$$

У функции $g(\cdot)$ полюсы второго порядка в точках $2n\omega + 2n'\omega'$ и простые нули в точках $v + 2n\omega + 2n'\omega'$ и $-v + 2n\omega + 2n'\omega'$. Из следствия 8.6 вытекает, что найдется постоянная C такая, что $f(z) = Cg(z)$. Таким образом,

$$\wp(u) - \wp(v) = C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}.$$

Умножим обе части этого равенства на u^2 и подставим $u = 0$. Получим $1 = -C\sigma^2(v)$. Отсюда

$$C = -\frac{1}{\sigma^2(v)}.$$

□

Из (8.33) вытекает, что

$$\sigma(u + \omega_k) = \sigma(u - \omega_k + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k u} \sigma(u - \omega_k).$$

Заменяя в равенстве (8.34) v на ω_k , учитывая, что $\wp(\omega_k) = e_k$, получаем

$$\wp(u) - e_k = e^{2\eta_k u} \left(\frac{\sigma(u - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)\sigma(u)} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Введем, кроме $\sigma(\cdot)$, еще три сигма-функции:

$$\sigma_k(u) = -e^{\eta_k u} \frac{\sigma(u - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Знак минус взят для того, чтобы имело место равенство $\sigma_k(0) = 1$. Функции $\sigma_k(\cdot)$ — четные. Действительно,

$$\begin{aligned} \sigma_k(-u) &= -e^{-\eta_k u} \frac{\sigma(-u - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = e^{-\eta_k u} \frac{\sigma(u + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \\ &= -e^{-\eta_k u} \frac{e^{2\eta_k u} \sigma(u - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = \sigma_k(u). \end{aligned}$$

Из определений функций $\sigma_k(\cdot)$

$$(8.35) \quad \wp(u) - e_k = \left(\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Примем то определение $\sqrt{\wp(u) - e_k}$, которое в окрестности точки $u = 0$ ведет себя как $1/u$. Тогда

$$(8.36) \quad \sqrt{\wp(u) - e_k} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)}, \quad k = 1, 2, 3.$$

8.11. Тета-функции

В качестве основной тета-функции примем

$$\theta_3(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2 \tau + 2mv)\pi i}.$$

Здесь v — аргумент, а τ — параметр, для которого $\text{Im } \tau < 0$. При таком условии величина $h = e^{\pi i \tau}$ по модулю меньше единицы, что влечет абсолютную сходимость рассматриваемого ряда для любого конечного v .

Нетрудно привести $\theta_3(\cdot)$ к виду

$$\theta_3(v) = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \dots$$

Таким образом, $\theta_3(\cdot)$ — четная целая функция с периодом 1.

Кроме $\theta_3(\cdot)$ вводятся еще три тета-функции

$$(8.37) \quad \begin{aligned} \theta_0(v) &= \theta_3\left(v + \frac{1}{2}\right), \\ \theta_1(v) &= ie^{-\pi i(v-\tau/4)} \theta_3\left(v + \frac{1-\tau}{2}\right), \\ \theta_2(v) &= e^{-\pi i(v-\tau/4)} \theta_3\left(v - \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно получить разложения этих тета-функций в ряды Фурье

$$\begin{aligned} \theta_0(v) &= 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \theta_1(v) &= 2h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots, \\ \theta_2(v) &= 2h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \dots \end{aligned}$$

8.12. Представление тета-функций бесконечными произведениями

Рассмотрим функцию

$$(8.38) \quad f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1}s) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1}s^{-1}),$$

где h — константа, модуль которой меньше единицы, а s — комплексная переменная. Написанные бесконечные произведения сходятся абсолютно при любом $s \neq 0$, и функция $f(\cdot)$ регулярна в каждой конечной точке $s \neq 0$. Из вида правой части (8.38) вытекает, что

$$(8.39) \quad f(s) = -hsf(h^2s).$$

Разложим $f(\cdot)$ в ряд Лорана

$$(8.40) \quad f(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s^k.$$

Принимая во внимание (8.39), получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s^k = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h^{2k+1} s^{k+1},$$

откуда следует, что

$$a_k = -a_{k-1} h^{2k-1}.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$(-1)^k a_k h^{-k^2} = (-1)^{k-1} a_{k-1} h^{-(k-1)^2}.$$

Таким образом, величина $(-1)^k a_k h^{-k^2}$ от k не зависит, и, значит,

$$(-1)^k a_k h^{-k^2} = a_0.$$

Следовательно, разложение (8.40) принимает вид

$$f(s) = a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} s^k.$$

Отсюда

$$f(e^{2\pi i v}) = a_0 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} \cos 2k\pi v \right) = a_0 \theta_0(v).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(e^{2\pi i v}) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1} e^{2\pi i v}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1} e^{-2\pi i v}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2h^{2k-1} \cos 2\pi v + h^{4k-2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\theta_0(v) = \frac{1}{a_0} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2h^{2k-1} \cos 2\pi v + h^{4k-2}).$$

Найдем постоянную a_0 . Рассмотрим функцию

$$(8.41) \quad f_n(s) = \prod_{k=1}^n (1 - h^{2k-1}s) \prod_{k=1}^n (1 - h^{2k-1}s^{-1})$$

Выполняя перемножение, получим

$$f_n(s) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \left(s + \frac{1}{s} \right) + \dots + a_n^{(n)} \left(s^n + \frac{1}{s^n} \right).$$

При этом

$$(8.42) \quad a_n^{(n)} = (-1)^n h^{1+3+\dots+2n-1} = (-1)^n h^{n^2}.$$

В силу (8.41)

$$(sh - h^{2n})f_n(h^2s) = -(1 - h^{2n+1})f_n(s).$$

Поэтому

$$(sh - h^{2n}) \sum_{k=-n}^n a_k^{(n)} h^{2k} s^k = -(1 - h^{2n+1}) \sum_{k=-n}^n a_k^{(n)} s^k$$

(здесь $a_{-k}^{(n)} = a_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, n$). Отсюда

$$\sum_{k=-n}^n a_k^{(n)} (h^{2k+1} - h^{2n+1}) s^{k+1} = \sum_{k=-n}^n a_k^{(n)} (h^{2k+2n} - 1) s^k.$$

Сравнение коэффициентов дает

$$a_k^{(n)} (h^{2k+1} - h^{2n+1}) = a_{k+1}^{(n)} (h^{2(k+n+1)} - 1).$$

Полагая здесь последовательно $k = 0, 1, \dots, n-1$ и перемножая полученные равенства, будем иметь

$$(-1)^n a_0^{(n)} \prod_{k=1}^n (h^{2k-1} - h^{2n+1}) = a_n^{(n)} \prod_{k=1}^n (1 - h^{2(n+k)}).$$

Отсюда в силу (8.42)

$$a_0^{(n)} = \frac{h^{n^2} \prod_{k=1}^n (1 - h^{2(n+k)})}{\prod_{k=1}^n (h^{2k-1} - h^{2n+1})}$$

или

$$a_0^{(n)} = \frac{\prod_{k=1}^n (1 - h^{2(n+k)})}{\prod_{k=1}^n (1 - h^{2k})}.$$

Величина a_0 , которую мы ищем, равна

$$a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0^{(n)}.$$

Действительно, в силу формул, которыми определяются коэффициенты ряда Лорана

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=1} f(s) \frac{ds}{s}, \quad a_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=1} f_n(s) \frac{ds}{s},$$

а на единичной окружности $f_n(\cdot)$ стремится к $f(\cdot)$ равномерно при $n \rightarrow \infty$. Тем самым

$$a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (1 - h^{2(n+k)})}{\prod_{k=1}^n (1 - h^{2k})} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k})}.$$

Итак, окончательная формула имеет вид

$$\begin{aligned}\theta_0(v) &= H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1} e^{2\pi i v}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1} e^{-2\pi i v}) \\ &= H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2h^{2k-1} \cos 2\pi v + h^{4k-2}),\end{aligned}$$

где

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k}).$$

Отсюда нетрудно получить разложения для остальных тета-функций. Выведем для примера разложение функции $\theta_1(\cdot)$. Воспользуемся равенством (см. (8.37))

$$\theta_1(v) = i h^{1/4} e^{-\pi i v} \theta_0\left(v - \frac{\tau}{2}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\theta_1(v) &= i H_0 h^{1/4} e^{-\pi i v} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-2} e^{2\pi i v}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k} e^{-2\pi i v}) \\ &= i H_0 h^{1/4} e^{-\pi i v} (1 - e^{2\pi i v}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k} e^{2\pi i v}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k} e^{-2\pi i v}) \\ &= 2 H_0 h^{1/4} \sin \pi v \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2h^{2k} \cos 2\pi v + h^{4k}).\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем разложения

$$\begin{aligned}\theta_2(v) &= 2 H_0 h^{1/4} \cos \pi v \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2h^{2k} \cos 2\pi v + h^{4k}), \\ \theta_3(v) &= H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2h^{2k-1} \cos 2\pi v + h^{4k-2}).\end{aligned}$$

ЛЕММА 8.13. Для любого h такого, что $|h| < 1$, имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^k) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1}) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Pi(h) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^k) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Pi(h) &= (1 + h^2)(1 + h^4) \dots (1 + h)(1 - h)(1 + h^3)(1 - h^3) \dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2(2k-1)}) = \Pi(h^2).\end{aligned}$$

Таким образом, $\Pi(h) = \Pi(h^{2^n})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если $|c| < 1/2$, то

$$\left| \frac{\ln(1+c)}{c} - 1 \right| = \left| -\frac{c}{2} + \frac{c^2}{3} - \dots \right| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$|\ln(1+c)| \leq \frac{3}{2}|c|.$$

Пусть n таково, что $|h|^m < 1/2$, $m = 2^n$. Тогда

$$|\ln(1 + h^{mk})| \leq \frac{3}{2}|h|^{mk}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1 + h^{mk})| \leq \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |h|^{mk} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|h|^m}{1 - |h|^m} \leq 3|h|^m.$$

Аналогично получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1 - h^{m(2k-1)})| \leq \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |h|^{m(2k-1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|h|^m}{1 - |h|^{2m}} \leq 2|h|^m.$$

Тем самым

$$|\ln \Pi(h)| \leq 5|h|^{2^n}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\ln \Pi(h) = 0$, то есть $\Pi(h) = 1$. $\square$

Проверим, что имеет место равенство

$$(8.43) \quad \theta'_1(0) = \pi\theta_0(0)\theta_2(0)\theta_3(0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \theta'_1(0) &= 2\pi H_0^3 h^{1/4}, \\ \theta_0(0) &= H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1})^2, \\ \theta_2(0) &= 2H_0 h^{1/4} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^{2k})^2, \\ \theta_3(0) &= H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^{2k-1})^2. \end{aligned}$$

В силу леммы 8.13

$$\begin{aligned} \pi\theta_0(0)\theta_2(0)\theta_3(0) &= 2\pi H_0^3 h^{1/4} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^{2k})^2 \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2(2k-1)})^2 \\ &= 2\pi H_0^3 h^{1/4} \Pi^2(h^2) = 2\pi H_0^3 h^{1/4} = \theta'_1(0). \end{aligned}$$

8.13. Связь между сигма-функциями и тета-функциями

Рассмотрим функции $\sigma(u)$ и $\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)$. У этих функций простые нули в точках

$$u = 2n\omega + 2n'\omega', \quad n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поэтому функция

$$f(u) = \frac{e^{\alpha u^2} \sigma(u)}{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)},$$

где α — произвольная постоянная, является целой.

Найдем $f(u + 2\omega)$ и $f(u + 2\omega')$:

$$\begin{aligned} f(u + 2\omega) &= \frac{e^{\alpha(u+2\omega)^2} \sigma(u + 2\omega)}{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega} + 1\right)} \\ &= e^{\alpha u^2} e^{4\omega\alpha(u+\omega)} e^{2\eta(u+\omega)} \frac{\sigma(u)}{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)} = e^{2(2\omega\alpha+\eta)(u+\omega)} f(u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u + 2\omega') &= \frac{e^{\alpha(u+2\omega')^2} \sigma(u + 2\omega')}{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega'} + \tau\right)} \\
&= e^{\alpha u^2} e^{4\omega' \alpha(u+\omega')} e^{2\eta'(u+\omega')} \frac{\sigma(u)}{h^{-1} e^{-\frac{2\pi i u}{2\omega}} \theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)} = e^{(2(2\omega' \alpha + \eta') + \pi i/\omega)(u+\omega)} f(u).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (8.27), будем иметь

$$2(2\omega' \alpha + \eta') + \frac{\pi i}{\omega} = 2\tau(2\omega \alpha + \eta).$$

Поэтому, если положить

$$\alpha = -\frac{\eta}{2\omega},$$

то станут справедливы равенства

$$f(u + 2\omega) = f(u), \quad f(u + 2\omega') = f(u).$$

Так как $f(\cdot)$ есть целая функция, то при указанном выборе α она превращается в константу. Следовательно,

$$\sigma(u) = C e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right).$$

Для определения константы C продифференцируем написанное равенство и положим $u = 0$. Это дает

$$1 = C \frac{1}{2\omega} \theta_1'(0),$$

откуда

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\theta_1'(0)} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right).$$

Найдем аналогичные представления для остальных сигма-функций. Имеем

$$\sigma_k(u) = e^{\eta_k u} \frac{\sigma(\omega_k - u)}{\sigma(\omega_k)} = \frac{C}{\sigma(\omega_k)} \theta_1\left(\frac{\omega_k - u}{2\omega}\right) e^{\eta_k u + \eta \frac{(\omega_k - u)^2}{2\omega}}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда

$$\sigma_k(u) = C_k \theta_1\left(\frac{\omega_k - u}{2\omega}\right) e^{\frac{\eta u^2}{2\omega} + (\eta_k \omega - \eta \omega_k) \frac{u}{\omega}}.$$

Учитывая (8.28) и (8.29), получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_1(u) &= C_1 \theta_1\left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}, \\
\sigma_2(u) &= C_2 e^{\frac{\pi i u}{2\omega}} \theta_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}, \\
\sigma_3(u) &= C_3 e^{-\frac{\pi i u}{2\omega}} \theta_1\left(\frac{\tau}{2} - \frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}.
\end{aligned}$$

Перейдем от $\theta_1(\cdot)$ к $\theta_3(\cdot)$, используя (8.37),

$$(8.44) \quad \theta_1\left(\frac{\omega_k}{2\omega} - v\right) = i e^{-\pi i \left(\frac{\omega_k}{2\omega} - \frac{\tau}{4} - v\right)} \theta_3\left(\frac{\omega_k}{2\omega} + \frac{1-\tau}{2} - v\right).$$

Положив $k = 1$, получим

$$\begin{aligned}
\theta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) &= i e^{-\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} - v\right)} \theta_3\left(\frac{1}{2} + \frac{1-\tau}{2} - v\right) = i e^{-\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} - v\right)} \theta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) \\
&= e^{\pi i (2v + \tau)} \theta_2(v + \tau) = \theta_2(v).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_1(u) = C_1 \theta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}.$$

Положим теперь в (8.44) $k = 2$

$$\theta_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - v\right) = ie^{-\pi i(-\frac{1}{2} - \frac{3\tau}{4} - v)}\theta_3(\tau + v) = -e^{-\pi\tau/4}e^{-\pi iv}\theta_3(v).$$

Отсюда

$$\sigma_2(u) = C'_2\theta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}.$$

Наконец, положив в (8.44) $k = 3$, получим

$$\theta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) = ie^{-\pi i(\frac{\tau}{4} - v)}\theta_3\left(\frac{1}{2} - v\right) = ie^{-\pi i(\frac{\tau}{4} - v)}\theta_0(v).$$

Тем самым

$$\sigma_3(u) = C'_3\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}.$$

Константы C_1, C'_2, C'_3 легко находятся при подстановке $u = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \frac{2\omega}{\theta'_1(0)}\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}, \\ \sigma_1(u) &= \frac{1}{\theta_2(0)}\theta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}, \\ \sigma_2(u) &= \frac{1}{\theta_3(0)}\theta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}, \\ \sigma_3(u) &= \frac{1}{\theta_0(0)}\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

8.14. Выражение e_1, e_2, e_3 через значения тета-функций

Из равенств (8.35) и (8.45) имеем

$$\wp(u) - e_3 = \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma^2(u)} = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_0^2(0)}\frac{\theta_0^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}. \quad (8.46)$$

Подставляя $u = \omega$, получаем

$$e_1 - e_3 = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_0^2(0)}\frac{\theta_0^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_0^2(0)}\frac{\theta_3^2(0)}{\theta_2^2(0)}.$$

Учитывая (8.43), имеем

$$e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\theta_3^4(0). \quad (8.47)$$

Подставим в (8.46) $u = \omega_2$

$$e_2 - e_3 = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_0^2(0)}\frac{\theta_0^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)}{\theta_1^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_0^2(0)}\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}.$$

Подставив снова выражение для $\theta_1'(0)$, получим

$$e_2 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\theta_2^4(0). \quad (8.48)$$

Из той же формулы (8.35) находим

$$\wp(u) - e_2 = \left(\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right)^2 = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_3^2(0)}\frac{\theta_3^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}.$$

Подставляя $u = \omega$, получаем

$$e_1 - e_2 = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_3^2(0)} \frac{\theta_3^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_3^2(0)} \frac{\theta_0^2(0)}{\theta_2^2(0)}.$$

Подставив выражение для $\theta_1'(0)$, получим

$$(8.49) \quad e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \theta_0^4(0).$$

8.15. Эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

В п. 8.3 был определен эллиптический синус. Здесь мы дадим другое (более общее) определение этой функции и тесно связанных с ним функций. Пусть τ — комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Im} \tau > 0$. В качестве ω возьмем некоторое число, зависящее от τ , которое будет определено позже, а число ω' определим равенством $\omega' = \tau\omega$.

Эллиптические функции Якоби определяются равенствами

$$(8.50) \quad \begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = 2\omega \frac{\theta_0(0)}{\theta_1'(0)} \frac{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \\ \operatorname{cn} u &= \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\theta_0(0)}{\theta_2(0)} \frac{\theta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \\ \operatorname{dn} u &= \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\theta_0(0)}{\theta_3(0)} \frac{\theta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}. \end{aligned}$$

Из свойств функций $\sigma(\cdot)$ и $\sigma_k(\cdot)$ вытекает, что $\operatorname{sn} u$ — нечетная функция, а $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — четные функции. Кроме того,

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1.$$

Из формул (8.36) вытекает, что

$$(8.51) \quad \begin{aligned} \sqrt{\wp(u) - e_3} &= \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \\ \sqrt{\wp(u) - e_1} &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \\ \sqrt{\wp(u) - e_2} &= \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}. \end{aligned}$$

Исключая из этих соотношений функцию $\wp(\cdot)$, получаем равенства

$$(8.52) \quad \begin{aligned} \operatorname{cn}^2 u + (e_1 - e_3) \operatorname{sn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2 u &= 1. \end{aligned}$$

Число ω , оставшееся пока неопределенным, выберем так, чтобы $e_1 - e_3 = 1$. Из (8.47) вытекает, что условие, определяющее ω можно записать в виде

$$\omega = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(0) = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^{n^2} \right)^2.$$

Тогда из (8.48) и (8.49) следует, что

$$(8.53) \quad \begin{aligned} e_2 - e_3 &= \frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}, \\ e_1 - e_2 &= \frac{\theta_0^4(0)}{\theta_3^4(0)}, \\ e_1 - e_3 &= 1. \end{aligned}$$

Равенства (8.52) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1, \end{aligned}$$

где

$$(8.54) \quad k = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}.$$

Величина k называется *модулем функций* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, а величина

$$k' = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}$$

называется *дополнительным модулем*. Из формул (8.53) видно, что имеет место соотношение

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Величины ω и ω' в теории эллиптических функций Якоби обычно обозначаются через K и iK' соответственно. Тем самым

$$K = \omega = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(0), \quad iK' = \omega' = \omega \tau = \frac{\pi \tau}{2} \theta_3^2(0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2} \right)^2 \\ k &= 4h^{1/2} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} h^{n(n+1)}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(8.55) \quad h = \frac{1}{16} k^2 + O(k^4)$$

и

$$(8.56) \quad K' = -\frac{K}{\pi} \ln h = \ln \frac{4}{k} + O\left(k^2 \ln \frac{4}{k}\right).$$

Под символами $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k'/k}$ будем понимать следующие значения корня

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \quad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\theta_0(0)}{\theta_2(0)}.$$

Если воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} 2\omega \frac{\theta_0(0)}{\theta_1'(0)} &= \pi \theta_3^2(0) \frac{\theta_0(0)}{\theta_1'(0)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \\ \frac{\theta_0(0)}{\theta_2(0)} &= \sqrt{\frac{k'}{k}}, \quad \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} = \sqrt{k'}, \end{aligned}$$

то формулы (8.50) можно записать в виде

$$(8.57) \quad \begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \\ \operatorname{cn} u &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \\ \operatorname{dn} u &= \sqrt{k'} \frac{\theta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}. \end{aligned}$$

Из этих формул с помощью свойств тета-функций можно получить следующую таблицу преобразований функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

	$u + K$	$u + iK'$	$u + K + iK'$	$u + 2K$	$u + 2iK'$	$u + 2K + 2iK'$
sn	$\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$	$\frac{1}{k} \frac{1}{\operatorname{sn} u}$	$\frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{sn} u$	$\operatorname{sn} u$	$-\operatorname{sn} u$
cn	$-k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$	$-\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$	$-i \frac{k'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{cn} u$	$-\operatorname{cn} u$	$\operatorname{sn} u$
dn	$k' \frac{1}{\operatorname{dn} u}$	$-i \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$	$-ik' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$	$\operatorname{dn} u$	$-\operatorname{dn} u$	$-\operatorname{dn} u$

Приведем еще одну таблицу

	Нули	Полюсы	Периоды
$\operatorname{sn} u$	$2nK + 2n'iK'$	$2nK + (2n' + 1)iK'$	$4K, 2iK'$
$\operatorname{cn} u$	$(2n + 1)K + 2n'iK'$	$2nK + (2n' + 1)iK'$	$4K, 2K + 2iK'$
$\operatorname{dn} u$	$(2n + 1)K + (2n' + 1)iK'$	$2nK + (2n' + 1)iK'$	$2K, 4iK'$

8.16. Дифференциальные уравнения для функций Якоби

Из (8.21) и (8.51) имеем

$$\wp'^2(u) = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3) = 4 \frac{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{sn}^6 u}.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} u^3 \wp'(u) &= -2, \\ \wp'(u) &= -2 \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u}. \end{aligned}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство

$$\wp(u) - e_3 = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(u)},$$

получаем, что

$$\wp'(u) = -\frac{2}{\operatorname{sn}^3 u} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u.$$

Сравнение двух полученных выражений для функции $\wp'(\cdot)$ дает формулу

$$(8.58) \quad \frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Далее, дифференцируя равенства

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u$$

и применяя формулу (8.58), получаем

$$(8.59) \quad \begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить дифференциальное уравнение для каждой из рассматриваемых функций

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{du} \operatorname{sn} u \right)^2 &= (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u), \\ \left(\frac{d}{du} \operatorname{cn} u \right)^2 &= (1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u), \\ \left(\frac{d}{du} \operatorname{dn} u \right)^2 &= -(1 - \operatorname{dn}^2 u)(k'^2 - \operatorname{dn}^2 u). \end{aligned}$$

Таким образом, например, функция $w = \operatorname{sn} u$ является обращением интеграла

$$u = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

как она и определялась ранее для $k \in (0, 1)$ (см. (8.6)). В п. 8.3 для $k \in (0, 1)$ были доказаны равенства

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Эти равенства остаются справедливыми для всех k из области, в которой интегралы представляют собой аналитическую функцию от k .

Введенные функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ зависят от параметра τ . Но для заданного k можно найти K и K' , а, следовательно, и $\tau = iK'/K$. Поэтому можно рассматривать эти функции зависящими от параметра k . В силу этого приняты обозначения $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$.

8.17. Теоремы сложения для функций Якоби

Пусть v — произвольное число из достаточно малой проколотой окрестности нуля. Рассмотрим функции

$$\varphi_1(u) = \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v), \quad \varphi_2(u) = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v), \quad \varphi_3(u) = \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v).$$

Нетрудно убедиться, что эти функции имеют периоды $2K$ и $2iK'$. Кроме того, у этих функций в параллелограмме периодов с вершиной в точке $-K$ два полюса iK' и $-v + iK'$. Для каждой из функций сумма вычетов в этих полюсах

равна нулю (см. теорему 8.7). Поэтому можно найти постоянные A и B такие, что функции $\varphi_2(\cdot) + A\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_3(\cdot) + B\varphi_1(\cdot)$ не имеют полюсов. Поскольку эллиптические функции, не имеющие полюсов, постоянны, это означает, что

$$(8.60) \quad \begin{aligned} \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v) + A \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) &= A_1, \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v) + B \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) &= B_1, \end{aligned}$$

где A_1 и B_1 постоянные (не зависящие от u величины). Полагая $u = 0$, находим

$$A_1 = \operatorname{cn} v, \quad B_1 = \operatorname{dn} v.$$

Дифференцируя равенства (8.60), учитывая формулы (8.59), получаем

$$\begin{aligned} -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn}(u+v) - \operatorname{cn} u \operatorname{sn}(u+v) \operatorname{dn}(u+v) + A \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) \\ + A \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{dn}(u+v) &= 0, \\ -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn}(u+v) - k^2 \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) \operatorname{cn}(u+v) + B \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) \\ + B \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{dn}(u+v) &= 0. \end{aligned}$$

Подставив $u = 0$, находим

$$A = \operatorname{dn} v, \quad B = k^2 \operatorname{cn} u.$$

Таким образом, формулы (8.60) принимают вид

$$(8.61) \quad \begin{aligned} \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) &= \operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v) + k^2 \operatorname{cn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) &= \operatorname{dn} v. \end{aligned}$$

Если зафиксировать u , то в правых и левых частях стоят мероморфные функции от переменной v . Поэтому в силу единственности полученные равенства верны для всех v .

Заменяем в равенствах (8.61) u на $-u$, а v на $u+v$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v &= \operatorname{cn}(u+v), \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v &= \operatorname{dn}(u+v). \end{aligned}$$

Из этих равенств находим

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $\operatorname{sn}(u+v)$ в первое из равенств (8.61), получаем

$$(8.62) \quad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

8.18. Второе главное преобразование первой степени

Рассмотрим две функции

$$f(u) = \operatorname{sn}(iu, k'), \quad g(u) = \operatorname{dn}(u + K + iK', k).$$

Обе функции имеют периоды $4iK'$ и $2K$. Множество нулей функции $f(\cdot)$ имеет вид

$$2nK + 2n'iK', \quad n, n' \in \mathbb{Z}.$$

Множество нулей функции $g(\cdot)$ находится из равенства

$$u + K + iK' = (2n+1)K + (2n'+1)iK', \quad n, n' \in \mathbb{Z}.$$

Тем самым эти множества совпадают. Множество полюсов функции $f(\cdot)$ имеет вид

$$(2n'+1)K + 2niK', \quad n, n' \in \mathbb{Z}.$$

Множество полюсов функции $g(\cdot)$ находится из равенства

$$u + K + iK' = 2nK + (2n' + 1)iK', \quad n, n' \in \mathbb{Z}.$$

Нетрудно видеть, что множества полюсов этих функций также совпадают. Поэтому из следствия 8.6 вытекает, что найдется постоянная C такая, что $f(\cdot) = Cg(\cdot)$. Таким образом, имеет место равенство

$$\operatorname{sn}(iu, k') = C \operatorname{dn}(u + K + iK', k).$$

Для нахождения константы C подставим в это равенство $u = -iK'$. Получаем

$$-1 = Ck'.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sn}(iu, k') = -\frac{1}{k'} \operatorname{dn}(u + K + iK', k).$$

В силу того, что

$$\operatorname{dn}(u + K + iK', k) = -ik' \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)},$$

имеем

$$(8.63) \quad \operatorname{sn}(iu, k') = i \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)}.$$

Отсюда

$$(8.64) \quad \begin{aligned} \operatorname{cn}(iu, k') &= \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k)}, \\ \operatorname{dn}(iu, k') &= \frac{\operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)}. \end{aligned}$$

Вычислим $\operatorname{sn}(K/2, k)$, пользуясь равенством (8.63). Из (8.11) вытекает, что

$$\operatorname{sn}\left(\frac{iK}{2}, k'\right) = \frac{i}{\sqrt{k'}}.$$

Следовательно, применяя (8.63), получаем

$$\frac{i}{\sqrt{k'}} = \operatorname{sn}\left(\frac{iK}{2}, k'\right) = i \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}, k\right)}.$$

Отсюда

$$\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}, k\right)}{1 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}, k\right)} = \frac{1}{k'}.$$

Тем самым

$$(8.65) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}.$$

8.19. Преобразование Ландена и Гаусса

Рассмотрим первое главное преобразование n -ой степени при $n = 2$, называемое преобразованием Ландена. Из (8.15) имеем

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(2\Lambda z + \Lambda, \lambda) = -k \frac{\operatorname{sn}^2(Kz, k) - c_1^2}{1 - k^2 c_1^2 \operatorname{sn}^2(Kz, k)},$$

где

$$c_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right), \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2 \frac{K'}{K}.$$

Учитывая равенство (8.8), получаем

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(2\Lambda z + \Lambda, \lambda) = -k \operatorname{sn}\left(Kz + \frac{K}{2}, k\right) \operatorname{sn}\left(Kz - \frac{K}{2}, k\right).$$

Подставив в это равенство $z = u + 1/2$, будем иметь

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(2\Lambda u + 2\Lambda, \lambda) = -k \operatorname{sn}(Ku + K, k) \operatorname{sn}(Ku, k).$$

Отсюда

$$(8.66) \quad \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(2\Lambda u, \lambda) = k \frac{\operatorname{cn}(Ku, k) \operatorname{sn}(Ku, k)}{\operatorname{dn}(Ku, k)}.$$

Подставив $u = 1/2$, получим

$$\sqrt{\lambda} = k \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}, k\right) \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}, k\right)}.$$

Отсюда, в силу (8.65), находим

$$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}.$$

Чтобы перейти к преобразованию Гаусса, запишем равенство (8.66) в виде

$$\sqrt{\lambda'} \operatorname{sn}(2\Lambda' iu, \lambda') = k' \frac{\operatorname{cn}(K' iu, k') \operatorname{sn}(K' iu, k')}{\operatorname{dn}(K' iu, k')}$$

и воспользуемся равенствами (8.63), (8.64). Получим

$$\sqrt{\lambda'} \frac{\operatorname{sn}(2\Lambda' u, \lambda)}{\operatorname{cn}(2\Lambda' u, \lambda)} = k' \frac{\operatorname{sn}(K' u, k)}{\operatorname{cn}(K' u, k) \operatorname{dn}(K' u, k)}.$$

При этом

$$\lambda' = \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Таким образом,

$$(8.67) \quad \frac{\operatorname{sn}(K' u, k)}{\operatorname{cn}(K' u, k) \operatorname{dn}(K' u, k)} = \frac{1}{1 + k} \frac{\operatorname{sn}(2\Lambda' u, \lambda)}{\operatorname{cn}(2\Lambda' u, \lambda)}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}.$$

8.20. Разложение эллиптического синуса в ряд Фурье

Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right),$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k . Эта функция имеет периоды 2π и $\pi i K'/K$ и допускает разложение

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nv.$$

Заменяя v на $\pi - v$, получим

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \sin nv.$$

Следовательно, $c_{2n} = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} \sin(2n-1)v.$$

Для коэффициентов Фурье c_{2n-1} имеем равенства

$$\begin{aligned} c_{2n-1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) \sin(2n-1)v \, dv = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\pi} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv} \, dv \\ &= \frac{2}{\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv} \, dv. \end{aligned}$$

Рассмотрим прямоугольник с вершинами в точках

$$-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi i K'}{K}, \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i K'}{K}.$$

Интегрируя функцию

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv}$$

по границе этого прямоугольника и учитывая, что рассматриваемая функция имеет период π , в силу чего интегралы по боковым сторонам сократятся, находим

(8.68)

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv} \, dv + \frac{2}{\pi i} \int_{\pi/2+\pi i K'/K}^{-\pi/2+\pi i K'/K} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv} \, dv \\ &= 4 \operatorname{rez}_{\frac{\pi i K'}{2K}} \left(\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\operatorname{rez}_{\frac{\pi i K'}{2K}} \left(\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) e^{(2n-1)iv} \right) = \frac{\pi}{2kK} h^{n-1/2},$$

то из (8.68) получаем

$$c_{2n-1}(1 - h^{2n-1}) = \frac{2\pi}{kK} h^{n-1/2}.$$

Итак, разложение имеет вид

(8.69)

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi}, k\right) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1/2}}{1 - h^{2n-1}} \sin(2n-1)v = \frac{\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)v}{\operatorname{sh}\left((2n-1)\frac{\pi K'}{2K}\right)}.$$

Дополнение III. Сферические гармоники. Собственные функции оператора Лапласа

9.1. Однородные многочлены

Однородным многочленом степени k в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется многочлен вида

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество всех однородных многочленов степени k . Очевидно, что $\mathcal{P}_k$ — линейное пространство.

Положим

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Если $P(\cdot) \in \mathcal{P}_k$, то

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha$$

— дифференциальный оператор. В частности, если

$$P(x) = |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2,$$

то $P(D) = \Delta$ — оператор Лапласа.

Введем в пространстве $\mathcal{P}_k$ скалярное произведение, положив

$$\langle P(\cdot), Q(\cdot) \rangle = P(D)Q(\cdot), \quad P(\cdot), Q(\cdot) \in \mathcal{P}_k.$$

Проверим, что введенная операция действительно является скалярным произведением. Прежде всего заметим, что

$$D^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Тем самым $\langle P(\cdot), Q(\cdot) \rangle$ принимает скалярные значения. Линейность функции $\langle P(\cdot), Q(\cdot) \rangle$ очевидна, а из равенства

$$D^\alpha x^\beta = D^\beta x^\alpha$$

вытекает коммутативность. Поскольку

$$\langle P(\cdot), P(\cdot) \rangle = \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2 \alpha!,$$

то $\langle P(\cdot), P(\cdot) \rangle = 0$ в том и только в том случае, если $P(\cdot) = 0$.

В пространстве $\mathcal{P}_k$ одночлены x^α , $|\alpha| = k$, образуют ортогональную систему и, следовательно, являются ортогональным базисом этого пространства. Число таких одночленов d_k равно числу различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ таких, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = k$. Для нахождения этого числа рассмотрим $d+k-1$ урну, выберем наудачу $d-1$ урну, а в остальные положим по одному шару.

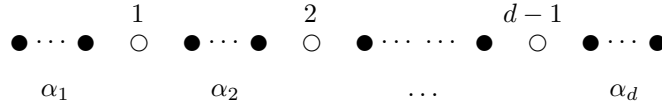


Рис. 9.1.1

Нетрудно убедиться, что число d_k равно числу способов выбора $d-1$ урны из $d+k-1$ урн, т.е.

$$d_k = C_{d+k-1}^{d-1} = \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!}.$$

9.2. Однородные гармонические многочлены

Однородными гармоническими многочленами степени k называются такие многочлены $P(\cdot) \in \mathcal{P}_k$, что $\Delta P(\cdot) = 0$. Множество однородных гармонических многочленов степени k обозначим через $\mathcal{A}_k$. Ясно, что $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{P}_k$.

ТЕОРЕМА 9.1. Всякий многочлен $P(\cdot) \in \mathcal{P}_k$ представим в виде

$$(9.1) \quad P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \dots + |x|^{2l} P_l(x),$$

где $P_j(\cdot) \in \mathcal{A}_{k-2j}$, $j = 0, \dots, l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $k \geq 2$ (при $k = 0, 1$ $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k$). Рассмотрим линейное подпространство

$$|x|^2 \mathcal{P}_{k-2} = \{P(\cdot) \in \mathcal{P}_k : P(x) = |x|^2 Q(x), Q(\cdot) \in \mathcal{P}_{k-2}\}.$$

Докажем, что его ортогональным дополнением является $\mathcal{A}_k$. Пусть $P_1(\cdot) \in \mathcal{P}_k$ и для всех $Q(\cdot) \in \mathcal{P}_{k-2}$

$$(9.2) \quad \langle R(\cdot), P_1(\cdot) \rangle = 0,$$

где $R(x) = |x|^2 Q(x)$. Но

$$(9.3) \quad \langle R(\cdot), P_1(\cdot) \rangle = \Delta Q(D) P_1(\cdot) = Q(D) \Delta P_1(\cdot) = \langle Q(\cdot), \Delta P_1(\cdot) \rangle.$$

Выберем $Q(\cdot) \in \mathcal{P}_{k-2}$ так, чтобы $Q(\cdot) = \Delta P_1(\cdot)$. Из (9.3) вытекает, что

$$\langle \Delta P_1(\cdot), \Delta P_1(\cdot) \rangle = 0.$$

Следовательно, $\Delta P_1(\cdot) = 0$ и $P_1(\cdot) \in \mathcal{A}_k$. Из (9.3) вытекает также, что верно и обратное, т.е. если $\Delta P_1(\cdot) = 0$, то для всех $Q(\cdot) \in \mathcal{P}_{k-2}$ выполняется равенство (9.2). Итак, доказано, что

$$(9.4) \quad \mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{k-2}.$$

Пусть $P(\cdot) \in \mathcal{P}_k$. Тогда найдутся такие однородные многочлены $P_0(\cdot) \in \mathcal{A}_k$ и $Q_1(\cdot) \in \mathcal{P}_{k-2}$, что

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q_1(x).$$

Если $k \geq 4$, то можно в аналогичном виде представить $Q_1(\cdot)$

$$Q_1(x) = P_1(x) + |x|^2 Q_2(x), \quad P_1(\cdot) \in \mathcal{A}_{k-2}, \quad Q_2(\cdot) \in \mathcal{P}_{k-4}.$$

Тем самым

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + |x|^4 Q_2(x).$$

Продолжая этот процесс, приходим к представлению (9.1). □

СЛЕДСТВИЕ 9.2. При всех $k \geq 2$

$$(9.5) \quad a_k = \dim \mathcal{A}_k = d_k - d_{k-2} = (d+2k-2) \frac{(d+k-3)!}{(d-2)!k!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9.4) имеем

$$d_k = \dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{A}_k + \dim |x|^k \mathcal{P}_{k-2} = \dim \mathcal{A}_k + d_{k-2}.$$

Отсюда следует (9.5). $\square$

В силу того, что $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}_k$ при $k = 0, 1$, имеем

$$a_0 = \dim \mathcal{A}_0 = 1, \quad a_1 = \dim \mathcal{A}_1 = d.$$

9.3. Сферические гармоники

Множество многочленов из $\mathcal{A}_k$, суженное на сферу

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$$

называется *сферическими гармониками порядка k* и обозначается через $\mathcal{H}_k$. Рассмотрим сужение $Y(\cdot)$ многочлена $P(\cdot) \in \mathcal{A}_k$ (при $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$ $Y(x') = P(x')$). В силу однородности $P(x) = |x|^k Y(x/|x|)$ при $x \neq 0$. Тем самым рассматриваемое сужение является изоморфизмом. Поэтому

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{A}_k = a_k.$$

ТЕОРЕМА 9.3. *Множество всех конечных линейных комбинаций из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ плотно в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство непрерывных функций плотно в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, достаточно доказать, что любая непрерывная функция может быть приближена конечными линейными комбинациями из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция может быть приближена в норме $L_{\infty}(\mathbb{S}^{d-1})$ (а значит, и в норме $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$) многочленами, суженными на $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу теоремы 9.1 эти сужения являются конечными линейными комбинациями элементов из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$. $\square$

ТЕОРЕМА 9.4. *Пусть $Y^{(k)}(\cdot) \in \mathcal{H}_k$ и $Y^{(l)}(\cdot) \in \mathcal{H}_l$, $k \neq l$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{(k)}(x') Y^{(l)}(x') dx' = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим при $x \neq 0$

$$u(x) = |x|^k Y^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad v(x) = |x|^l Y^{(l)}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Если $x = 0$ и $k \neq 0$, положим $u(0) = 0$. При $k = 0$ $Y^{(k)} \equiv C$, поэтому в этом случае полагаем $u(0) = C$. Аналогично доопределяется значение $v(\cdot)$ в нуле. Вектор $n = (x_1, \dots, x_d)$ при $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ является единичным вектором внешней нормали к $\mathbb{S}^{d-1}$ в точке x . При всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(9.6) \quad (\text{grad } u(x), n) = \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = k u(x)$$

(здесь $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$). Аналогично получаем, что для всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(\text{grad } v(x), n) = l v(x).$$

Пользуясь формулой Гаусса

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (F(x'), n) dx' = \int_{\mathbb{B}^d} \text{div } F(x) dx,$$

где

$$\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\},$$

получаем

$$\begin{aligned}
(k-l) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x')v(x') dx' &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (v(x') \operatorname{grad} u(x') - u(x') \operatorname{grad} v(x'), n) dx' \\
&= \int_{\mathbb{B}^d} \operatorname{div}((v(x') \operatorname{grad} u(x') - u(x') \operatorname{grad} v(x')) dx \\
&= \int_{\mathbb{B}^d} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{B}^d} (v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)) dx = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{(k)}(x')Y^{(l)}(x')dx' = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x')v(x') dx' = 0.$$

□

Будем рассматривать $\mathcal{H}_k$ как подпространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ со скалярным произведением

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x')g(x') dx'.$$

Пусть $Y_1^{(k)}(\cdot), \dots, Y_{a_k}^{(k)}(\cdot)$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Тогда из теоремы 9.3 вытекает, что система однородных сферических гармоник $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, a_k$, является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тем самым для любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеет место равенство

$$f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$c_{kj} = (f(\cdot), Y_j^{(k)}(\cdot))_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x')Y_j^{(k)}(x') dx'.$$

9.4. Зональные гармоники

Пусть $Y_1^{(k)}(\cdot), \dots, Y_{a_k}^{(k)}(\cdot)$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Зафиксируем $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Сферическая гармоника

$$Z_{x'}^{(k)}(t') = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x')Y_j^{(k)}(t')$$

называется *зональной гармоникой степени k с полюсом в точке x'* .

ЛЕММА 9.5. Для любых $Y(\cdot) \in \mathcal{H}_k$

$$Y(x') = (Y(\cdot), Z_{x'}^{(k)}(\cdot))_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(Y(\cdot), Z_{x'}^{(k)}(\cdot))_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x')(Y(\cdot), Y_j^{(k)}(\cdot))_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = Y(x').$$

□

Вращением называется линейное преобразование $\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ такое, что

- (1) для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ $(\rho x, \rho y) = (x, y)$;

$$(2) \det \rho = 1.$$

ЛЕММА 9.6. Если ρ — вращение, то

$$Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') = Z_{x'}^{(k)}(t').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав замену переменных $w' = \rho t'$, для всех $Y(\cdot) \in \mathcal{H}_k$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') Y(t') dt' &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(w') Y(\rho^{-1} w') dw' \\ &= Y(\rho^{-1}(\rho x')) = Y(x') = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{x'}^{(k)}(t') Y(t') dt'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')$ и $Z_{x'}^{(k)}(t')$ совпадают. $\square$

ЛЕММА 9.7. Для всех $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 = \frac{a_k}{\omega_{d-1}},$$

где

$$\omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

— площадь сферы $\mathbb{S}^{d-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки на $\mathbb{S}^{d-1}$. Существует вращение ρ такое, что $x_2 = \rho x_1$. Тогда из леммы 9.6

$$Z_{x_2}^{(k)}(x_2) = Z_{\rho x_1}^{(k)}(\rho x_1) = Z_{x_1}^{(k)}(x_1).$$

Следовательно, при всех $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$Z_{x'}^{(k)}(x') = c.$$

Из определения зональных гармоник

$$\sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 = Z_{x'}^{(k)}(x') = c.$$

В силу ортонормированности системы $Y_1^{(k)}(\cdot), \dots, Y_{a_k}^{(k)}(\cdot)$ имеем

$$c\omega_{d-1} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 dx' = a_k.$$

Отсюда

$$c = \frac{a_k}{\omega_{d-1}}.$$

$\square$

9.5. Задача Дирихле

Классическая задача Дирихле для единичного шара в $\mathbb{R}^d$ состоит в нахождении функции, непрерывной при $|x| \leq 1$ и гармонической при $|x| < 1$, совпадающей на границе с заданной непрерывной функцией $f(\cdot)$. Хорошо известно, что решение этой задачи существует, единственно и дается *интегралом Пуассона*

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p(s, x) f(s) ds,$$

где

$$p(s, x) = \frac{1}{\omega_{d-1}} \cdot \frac{1 - |x|^2}{|x - s|^d}$$

— ядро Пуассона для единичного шара.

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле: найти функцию $u(\cdot)$, гармоническую внутри единичного шара, для которой

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rx') - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Пусть $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тогда

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

и

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2.$$

Докажем, что функция

$$(9.7) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

(доопределенная в нуле по непрерывности) является решением поставленной задачи.

Из леммы 9.7 вытекает, что при всех x

$$\left| Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}.$$

Тем самым при всех x таких, что $|x| \leq r$, $0 < r < 1$,

$$|x|^k \left| Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq r^k \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}.$$

Из того, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}$$

сходится вытекает равномерная сходимость ряда (9.7) на множестве $|x| \leq r$ при всех $0 < r < 1$. Тем самым $u(x)$ — гармоническая функция при $|x| < 1$.

При всех $0 < r < 1$

$$u(rx') - f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} (r^k - 1) \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Поэтому

$$a(r) = \|u(rx') - f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \varepsilon.$$

Тогда

$$a(r) < \sum_{k=0}^N (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 + \varepsilon.$$

Из того, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^N (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 = 0,$$

вытекает существование $r_\varepsilon \in (0, 1)$ такого, что для всех $r \in (r_\varepsilon, 1)$

$$\sum_{k=0}^N (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \varepsilon.$$

Тем самым $a(r) < 2\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|u(rx') - f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \lim_{r \rightarrow 1-0} a(r) = 0.$$

Докажем единственность решения поставленной задачи Дирихле. Для этого достаточно доказать, что гармоническая внутри единичного шара функция $u(\cdot)$ при выполнении условия

$$(9.8) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|u(rx')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0$$

тождественно равна нулю.

Если $|x| = r < 1$, то

$$p(s, x) \leq \frac{1+r}{\omega_{d-1}(1-r)^{d-1}}.$$

Зафиксируем x_0 , $|x_0| = r_0 < 1$. Функция $u(rx)$ при всех $r < 1$ является гармонической в единичном шаре и непрерывной при $|x| \leq r$. Поэтому ее можно представить в виде

$$u(rx) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p(s, x) u(rs) ds.$$

Тем самым при $r > r_0$

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p\left(s, \frac{x_0}{r}\right) u(rs) ds.$$

Отсюда

$$|u(x_0)| \leq \frac{1+r_0/r}{\omega_{d-1}(1-r_0/r)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rs)| ds.$$

Для r достаточно близких к единице, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$|u(x_0)| \leq \frac{2(1+r_0)}{\sqrt{\omega_{d-1}(1-r_0)^{d-1}}} \|u(rs)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Из условия (9.8) вытекает, что $u(x_0) = 0$.

9.6. Собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами

Сферический лапласиан или *оператор Лапласа–Бельтрами* Δ_S определяется для функций, заданных на единичной сфере, следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right) \Big|_{x=x'}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.8. Пусть $Y^{(k)}(\cdot) \in \mathcal{H}_k$. Тогда

$$\Delta_S Y^{(k)}(\cdot) = -\Lambda_k Y^{(k)}(\cdot),$$

где

$$\Lambda_k = k(k+d-2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta_S Y^{(k)}(x') &= \Delta(|x|^{-k} Y^{(k)}(x)) = Y^{(k)}(x) \Delta(|x|^{-k}) + |x|^{-k} \Delta Y^{(k)}(x) \\ &+ 2 \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-k} \frac{\partial}{\partial x_j} Y^{(k)}(x) = Y^{(k)}(x) \Delta(|x|^{-k}) - \frac{2k}{|x|^{k+2}} \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial}{\partial x_j} Y^{(k)}(x) \\ &= (\Delta(|x|^{-k}) - 2k^2 |x|^{-k-2}) Y^{(k)}(x).\end{aligned}$$

Остается воспользоваться легко проверяемым равенством

$$\Delta(|x|^{-k}) = (k^2 + 2k - dk) |x|^{-k-2}.$$

□

Пусть $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$Y(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot).$$

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x', t)$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$(9.9) \quad u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$

для которой

$$(9.10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(x', t) - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Отметим, что при $\alpha = 2$ уравнение (9.9) переходит в уравнение теплопроводности.

Пусть $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Тогда, используя метод Фурье и рассуждения аналогичные тем, которые приводились для задачи Дирихле, можно показать, что решением поставленной задачи является функция

$$(9.11) \quad u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

9.7. Функции Бесселя

Дифференциальное уравнение вида

$$(9.12) \quad t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - p^2) y(t) = 0, \quad t > 0, \quad p \geq 0,$$

называется *уравнением Бесселя p -го порядка*. Поделив это уравнение на $t \neq 0$, получим

$$t y''(t) + y'(t) + \left(t - \frac{p^2}{t}\right) y(t) = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$(9.13) \quad (ty'(t))' + \left(t - \frac{p^2}{t}\right)y(t) = 0.$$

Уравнение Бесселя (9.12), записанное в виде (9.13), называется *уравнением Бесселя в самоспряженном виде*.

Уравнение Бесселя (9.12) можно преобразовать к виду, не содержащему первой производной. Введем для этого функцию

$$Z(t) = \sqrt{t}y(t).$$

Имеем

$$ty'(t) = \sqrt{t}Z'(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}}Z(t), \quad (ty'(t))' = \sqrt{t}Z''(t) + \frac{1}{4t^{3/2}}Z(t).$$

Подставив полученное выражение для $(ty'(t))'$ в (9.13), будем иметь

$$(9.14) \quad Z''(t) + \left(1 - \frac{4p^2 - 1}{4t^2}\right) Z(t) = 0.$$

Это уравнение называют *уравнением Бесселя в приведенном виде*.

Будем искать решение уравнения (9.12) в виде ряда

$$y(t) = t^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

где σ — некоторый параметр, а $a_0 \neq 0$ (иначе можно изменить σ). Подставляя $y(\cdot)$ в уравнение (9.12), получаем систему уравнений для коэффициентов a_k , $k = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned}
& a_0(\sigma^2 - p^2) = 0, \\
& a_1((\sigma + 1)^2 - p^2) = 0, \\
& a_2((\sigma + 2)^2 - p^2) + a_0 = 0, \\
& \dots \dots \dots \\
& a_k((\sigma + k)^2 - p^2) + a_{k-2} = 0, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}
\tag{9.15}$$

Рассмотрим случай, когда $\sigma = p$. Из уравнений (9.15) получаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю, а для четных коэффициентов справедливо равенство

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (p+1)(p+2) \dots (p+k)}.$$

Положим (для более простой записи членов ряда)

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}.$$

Тогда

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}.$$

Тем самым функция

$$(9.16) \quad J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

является решением уравнения (9.12). Функция $J_p(\cdot)$ называется *функцией Бесселя первого рода p -го порядка*.

9.8. Ортогональность функций Бесселя

ТЕОРЕМА 9.9. Для любых $\mu_1, \mu_2 > 0$ для функции Бесселя $J_p(\cdot)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 J_p(\mu_1 t) J_p(\mu_2 t) t dt = \begin{cases} \frac{\mu_2 J_p(\mu_1) J'_p(\mu_2) - \mu_1 J'_p(\mu_1) J_p(\mu_2)}{\mu_1^2 - \mu_2^2}, & \mu_1 \neq \mu_2, \\ \frac{1}{2} (J'_p(\mu_1))^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\mu_1^2}\right) J_p^2(\mu_1), & \mu_1 = \mu_2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $J_p(t)$ удовлетворяет уравнению Бесселя, записанному в самосопряженной форме (9.13)

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{dJ_p(t)}{dt} \right) + \left(t - \frac{p^2}{t} \right) J_p(t) = 0.$$

Следовательно, функция $J_p(\mu_1 t)$ будет удовлетворять уравнению

$$(9.17) \quad \frac{d}{dt} \left(t \frac{dJ_p(\mu_1 t)}{dt} \right) + \left(\mu_1^2 t - \frac{p^2}{t} \right) J_p(\mu_1 t) = 0.$$

Для функции $J_p(\mu_2 t)$ справедливо аналогичное уравнение

$$(9.18) \quad \frac{d}{dt} \left(t \frac{dJ_p(\mu_2 t)}{dt} \right) + \left(\mu_2^2 t - \frac{p^2}{t} \right) J_p(\mu_2 t) = 0.$$

Умножим равенство (9.17) на $J_p(\mu_2 t)$, равенство (9.18) — на $J_p(\mu_1 t)$, а затем вычтем одно из другого. Получим

$$\frac{d}{dt} (\mu_2 t J_p(\mu_1 t) J'_p(\mu_2 t) - \mu_1 t J_p(\mu_2 t) J'_p(\mu_1 t)) = (\mu_1^2 - \mu_2^2) t J_p(\mu_1 t) J_p(\mu_2 t).$$

Проинтегрировав это равенство по отрезку $[0, 1]$, будем иметь

$$(9.19) \quad (\mu_2 t J_p(\mu_1 t) J'_p(\mu_2 t) - \mu_1 t J_p(\mu_2 t) J'_p(\mu_1 t)) \Big|_0^1 = (\mu_1^2 - \mu_2^2) \int_0^1 t J_p(\mu_1 t) J_p(\mu_2 t) dt.$$

Из представления (9.16) вытекает, что

$$J_p(\mu t) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{\mu t}{2} \right)^p + O(t^{p+2}), \quad \mu t J'_p(\mu t) = \frac{p}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{\mu t}{2} \right)^p + O(t^{p+2}).$$

Тем самым

$$\mu_2 t J_p(\mu_1 t) J'_p(\mu_2 t) - \mu_1 t J_p(\mu_2 t) J'_p(\mu_1 t) = O(t^{p+2}).$$

Следовательно, левая часть равенства (9.19) при $t = 0$ обращается в нуль.

Таким образом, получаем равенство

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) \int_0^1 t J_p(\mu_1 t) J_p(\mu_2 t) dt = \mu_2 J_p(\mu_1) J'_p(\mu_2) - \mu_1 J_p(\mu_2) J'_p(\mu_1),$$

из которого следует, что

$$\int_0^1 J_p(\mu_1 t) J_p(\mu_2 t) t dt = \frac{\mu_2 J_p(\mu_1) J'_p(\mu_2) - \mu_1 J_p(\mu_2) J'_p(\mu_1)}{\mu_1^2 - \mu_2^2}.$$

Перейдем в полученном равенстве к пределу при $\mu_2 \rightarrow \mu_1$, применяя правило Лопиталля. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_p^2(\mu_1 t) t dt &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{J_p(\mu_1) J'_p(\mu_2) + \mu_2 J_p(\mu_1) J''_p(\mu_2) - \mu_1 J'_p(\mu_2) J'_p(\mu_1)}{-2\mu_2} \\ &= \frac{1}{2} (J'_p(\mu_1))^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_p(\mu_1) J'_p(\mu_1) - \frac{1}{2} J_p(\mu_1) J''_p(\mu_1). \end{aligned}$$

Подставив в это выражение

$$J_p''(\mu_1) = -\frac{1}{\mu_1} J_p'(\mu_1) - \left(1 - \frac{p^2}{\mu_1^2}\right) J_p(\mu_1),$$

находим

$$\int_0^1 J_p^2(\mu_1 t) t dt = \frac{1}{2} (J_p'(\mu_1))^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\mu_1^2}\right) J_p^2(\mu_1).$$

□

СЛЕДСТВИЕ 9.10. Для любых корней $\mu_1, \mu_2 > 0$ функции Бесселя $J_p(\cdot)$ справедливо равенство

$$\int_0^1 J_p(\mu_1 t) J_p(\mu_2 t) t dt = \begin{cases} 0, & \mu_1 \neq \mu_2, \\ \frac{1}{2} (J_p'(\mu_1))^2, & \mu_1 = \mu_2. \end{cases}$$

9.9. Теорема Штурма о сравнении

ТЕОРЕМА 9.11 (Штурма о сравнении). Пусть даны уравнения

$$(9.20) \quad x'' + q(t)x = 0$$

и

$$(9.21) \quad x'' + Q(t)x = 0,$$

где функции $q(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ непрерывны. Если ненулевое решение уравнения (9.20) обращается в нуль в точках a и b , а $Q(t) > q(t)$ на отрезке $[a, b]$, то любое решение уравнения (9.21) обращается в нуль на интервале (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(\cdot)$ — ненулевое решение уравнения (9.20) такое, что $x(a) = x(b) = 0$. Так как функции $q(\cdot)$ непрерывна, к решению уравнения (9.20) применима теорема существования и единственности решения задачи Коши. Из этой теоремы вытекает, что в нулях функции $x(\cdot)$ производная $x'(\cdot)$ не обращается в нуль и нули не могут иметь точку сгущения на $[a, b]$, и тем самым нулей конечное число. Поэтому в качестве a, b можно взять соседние нули. Без ограничения общности можно считать, что $x(\cdot)$ положительна на интервале (a, b) , а тогда $x'(a) > 0$, $x'(b) < 0$. Предположим, что решение $X(\cdot)$ уравнения (9.21) не имеет нулей на интервале (a, b) . Можно считать, что $X(t) > 0$, $t \in (a, b)$.

Умножим уравнение (9.21) на $X(\cdot)$, а второе на $x(\cdot)$, и запишем их разность:

$$x''(t)X(t) - X''(t)x(t) = (Q(t) - q(t))X(t)x(t).$$

Интегрируя по отрезку $[a, b]$, получим

$$\int_a^b (x''(t)X(t) - X''(t)x(t)) dt = \int_a^b (Q(t) - q(t))X(t)x(t) dt > 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_a^b (x''(t)X(t) - X''(t)x(t)) dt &= \int_a^b X(t) dx'(t) - \int_a^b x(t) dX' \\ &= X(b)x'(b) - X(a)x'(a) \leq 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие. □

9.10. Свойства нулей функции Бесселя

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.12. *Все положительные нули функций Бесселя простые.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mu > 0$ есть нуль функции Бесселя $J_p(\cdot)$ кратности $n \geq 2$. В силу гладкости $J_p(\cdot)$ получаем $J_p(\mu) = J_p'(\mu) = 0$. Согласно единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка (9.12) отсюда следует, что $J_p(t) \equiv 0$. Это противоречит представлению (9.16). $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.13. *Множество нулей функции Бесселя $J_p(\cdot)$ не может иметь конечную предельную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что точка $t = 0$ является изолированным нулем $J_p(\cdot)$ при $p > 0$. Имеем

$$J_p(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{p/2} \varphi(t), \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Функция $\varphi(\cdot)$ является непрерывной на $[0, +\infty)$ и

$$\varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} > 0.$$

Следовательно, существует такая окрестность $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, в которой $\varphi(\cdot)$ не обращается в нуль. Отсюда следует, что точка $t = 0$ является изолированным нулем $J_p(\cdot)$.

2. Предположим, что $\mu > 0$ — конечная предельная точка нулей $J_p(\cdot)$. Тогда существует последовательность t_k нулей $J_p(\cdot)$, сходящаяся к μ . В силу непрерывности $J_p(\cdot)$ сама точка μ также является нулем $J_p(\cdot)$. Имеем

$$J_p'(\mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{J_p(x_k) - J_p(\mu)}{x_k - \mu} = 0.$$

Это означает, что точка μ — нуль кратности два, что противоречит предложению 9.12. $\square$

Из доказанного предложения вытекает, что на любом отрезке из $[0, \infty)$ функция $J_p(\cdot)$ может иметь лишь конечное число нулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.14. *Множество положительных нулей функции Бесселя $J_p(\cdot)$ является счетным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $y(t) = \sin t/2$ является решением уравнения

$$y'' + \frac{1}{4}y = 0.$$

Точки $t_k = 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$, являются нулями функции $y(\cdot)$. Для достаточно больших t

$$1 - \frac{4p^2 - 1}{4t^2} > \frac{1}{4}.$$

Поэтому по теореме Штурма о сравнении (теорема 9.11), начиная с некоторого $N > 0$, на каждом интервале (t_k, t_{k+1}) , $k \geq N$, функция

$$Z_p(t) = \sqrt{t}J_p(t)$$

будет иметь хотя бы один нуль. Так как на любом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ число нулей конечно, то общее число положительных нулей счетно. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.15. *Величина наименьшего положительного нуля функции $J_p(\cdot)$ неограниченно возрастает при $p \rightarrow +\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < p_1 < p_2$, и μ_2 — наименьший положительный корень функции $J_{p_2}(\cdot)$. Из неравенства

$$1 - \frac{4p_1^2 - 1}{4t^2} > 1 - \frac{4p_2^2 - 1}{4t^2}$$

в силу теоремы Штурма о сравнении (теорема 9.11) следует, что на интервале $(0, \mu_2)$ имеется хотя бы один нуль функции $J_{p_1}(\cdot)$, в частности ее минимальный положительный нуль μ_1 . Тем самым доказано, что $\mu_1 < \mu_2$.

Докажем, что наименьший положительный нуль функции $J_p(\cdot)$ стремится к бесконечности при $p \rightarrow +\infty$. Имеем

$$J_p(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p+1)} (1 - \varphi(t)),$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(p+1) \dots (p+k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Для функции $\varphi(\cdot)$ справедлива следующая оценка

$$|\varphi(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = \frac{e^{t^2/4} - 1}{p+1}.$$

Отсюда вытекает, что для t , при которых

$$\frac{e^{t^2/4} - 1}{p+1} < 1,$$

функция $J_p(\cdot)$ не обращается в нуль. Следовательно, наименьший положительный нуль функции $J_p(\cdot)$ лежит в промежутке $[2\sqrt{\ln(p+2)}, +\infty)$. $\square$

9.11. Собственные функции оператора Лапласа в шаре

Пусть $Y(\cdot) \in \mathcal{A}_k$. Будем искать собственные функции оператора Лапласа в виде

$$u(x) = F(r)Y(x), \quad r = |x|.$$

Имеем

$$\Delta u(x) = Y(x)\Delta F(r) + 2 \sum_{j=1}^d \frac{\partial F(r)}{\partial x_j} \frac{\partial Y(x)}{\partial x_j}.$$

В силу того, что

$$\frac{\partial F(r)}{\partial x_j} = F'(r) \frac{x_j}{r},$$

используя однородность $Y(\cdot)$ (см. (9.6)), получаем

$$\Delta u(x) = Y(x)\Delta F(r) + 2kY(x) \frac{F'(r)}{r}.$$

Из того, что функция $u(\cdot)$ должна быть собственной, т.е. при некотором λ должно иметь место равенство

$$\Delta u(\cdot) = -\lambda u(\cdot),$$

получаем уравнение на $F(\cdot)$

$$(9.22) \quad \Delta F(r) + 2k \frac{F'(r)}{r} + \lambda F(r) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Delta F(r) &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(F'(r) \frac{x_j}{r} \right) = \sum_{j=1}^d \left(\left(\frac{F'(r)}{r} \right)' \frac{x_j^2}{r} + \frac{F'(r)}{r} \right) \\ &= \left(\frac{F'(r)}{r} \right)' r + \frac{d}{r} F'(r) = F''(r) + \frac{d-1}{r} F'(r).\end{aligned}$$

Тем самым уравнение (9.22) принимает вид

$$F''(r) + \frac{2k+d-1}{r} F'(r) + \lambda F(r) = 0.$$

Положим

$$F(r) = f(r)r^{-p}, \quad p = k + \frac{d-2}{2}.$$

Тогда для функции $f(\cdot)$ получим уравнение

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - p^2) f(r) = 0.$$

Положив $y(t) = f(t/\sqrt{\lambda})$, для функции $y(\cdot)$ получим уравнение

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - p^2) y(t) = 0,$$

которое является уравнением Бесселя p -го порядка. Пусть $J_p(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода p -го порядка (являющаяся решением этого уравнения).

Тогда функции

$$\frac{J_p(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y(x'), \quad p = k + d/2 - 1, \quad x' = \frac{x}{r},$$

где $\mu_s^{(p)}$ — корни функции Бесселя $J_p(\cdot)$, занумерованные в порядке возрастания, при всех $Y(\cdot) \in \mathcal{H}_k$ являются собственными функциями оператора Лапласа, равными нулю на $\mathbb{S}^{d-1}$, отвечающие собственным значениям $-(\mu_s^{(p)})^2$. Выбрав ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, получаем ортогональную систему собственных функций

$$Z_{ksj}(x) = \frac{J_p(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y_j^{(k)}(x'), \quad k = 0, 1, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Эта система является базисом в $L_2(\mathbb{B}^d)$. Ее можно ортонормировать, положив

$$(9.23) \quad Y_{ksj}(x) = \frac{1}{\|Z_{ksj}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}} Z_{ksj}(x).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|Z_{ksj}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 = \int_0^1 J_p^2(\mu_s^{(p)} r) r \, dr.$$

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d)$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x).$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ следующим образом:

$$(9.24) \quad (-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(\cdot).$$

Литература

- [1] Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. “Sharp multidimensional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, *Math. Ineq. Appl.*, **1** (1998), 53–67.
- [2] Dieudonné J. “Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d’une variable complexe”, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **3**:48 (1931), 247–358.
- [3] Duren P. L. *Theory of H^p spaces*. N.Y.: Acad. Press, 1970.
- [4] Farkov Yu. A. “ n -Widths, Faber expansions, and computation of analytic functions”, *J. Complexity*, **12**:1 (1996), 58–79.
- [5] Fisher S. D. “Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions”, *Constr. Approx.*, **5** (1989), 171–187.
- [6] Fisher S. D., Micchelli C. A. “The n -width of sets of analytic functions”, *Duke Math. J.*, **47** (1980), 789–801.
- [7] Hadamard J. “Sur le module maximum d’une fonction et ses dérivées”, *C. R. Soc. Math. France*, **41** (1914), 68–72.
- [8] Gaffney P. W., Powell M. J. D. “Optimal interpolation”, *Lecture Notes in Math.*, **506** (1976), 90–99.
- [9] Gal S., Micchelli C. A. “Optimal sequential and non-sequential procedures for evaluating a functional”, *Appl. Anal.*, **10**:2 (1980), 105–120.
- [10] Kon M. A., Novak E. “On the adaptive and continuous information problems”, *J. Complexity*, **5** (1989), 345–362.
- [11] Landau E. “Ungleichungen für zweimal differenzierbar Funktionen”, *Proc. London. Math. Soc.*, **2**:13 (1913), 43–49.
- [12] Magaril-Il’yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M. “On optimal recovery of heat equation solutions”, In: *Approximation Theory: A volume dedicated to B.Bojanov (D.K. Dimitrov, G.Nikolov, and R.Uluchev, Eds.)*, 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [13] Melkman A. A., Micchelli C. A. “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 87–105.
- [14] Micchelli C. A. “Optimal estimation of smooth functions from inaccurate data”, *J. Inst. Math. and Appl.*, **23**:4 (1979), 473–495.
- [15] Micchelli C. A., Rivlin T. J. “A survey of optimal recovery”, *Optimal Estimation in Approximation Theory*. New York: Plenum Press, 1977, 1–54.
- [16] Micchelli C. A., Rivlin T. J. “Lectures on Optimal Recovery”, *Lecture Notes in Math.* Berlin: Springer-Verlag, bf1129 (1985), 21–93.
- [17] Micchelli C. A., Rivlin T. J., Winograd S. “The optimal recovery of smooth functions”, *Numer. Math.*, **26** (1976), 191–200.
- [18] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery of periodic functions from Fourier coefficients given with an error”, *J. Complexity*, **12**:1 (1996), 35–46.
- [19] Osipenko K. Yu. *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Nova Science Publishers, Inc., Huntington, New York, 2000.
- [20] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery of linear functionals and operators”, *Communication on Applied Mathematics and Computation*, **30**:4 (2016), 459–481.
- [21] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.
- [22] Osipenko K. Yu. “Recovery of derivatives for functions defined on the semiaxis”, *J. Complexity*, **48** (2018), 111–118.
- [23] Osipenko K. Yu. “Generalized adaptive versus nonadaptive recovery from noisy information”, *J. Complexity*, **53** (2019), 162–172.
- [24] Osipenko K. Yu. “Inequalities for derivatives with the Fourier transform”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **53** (2021), 132–150.
- [25] Osipenko K. Yu., Stessin M. I. “On some problems of optimal recovery of analytic and harmonic functions from inaccurate data”, *J. Approx. Theory*, **70** (1992), 206–228.

- [26] Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V. "Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data", *J. Complexity*, **23**:4–6 (2007), 653–661.
- [27] Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. Berlin. Springer-Verlag, 1985.
- [28] Plaskota L. Noisy Information and Computational Complexity. Cambridge University Press, 1996.
- [29] Stein E. M. "Functions of exponential type", *Ann. of Math. (2)*, **65**:3 (1957), 582–592.
- [30] Traub J. F., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H. Information-Based Complexity. N. Y.: Acad. Press, 1988.
- [31] Арестов В. В. "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.
- [32] Арестов В. В. "Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи", *Успехи матем. наук.*, **51** (1996), 89–124.
- [33] Бабенко К. И. "О наилучших приближениях одного класса аналитических функций", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640.
- [34] Балова Е. А. "Оптимальные методы восстановления решений задачи Дирихле, точные на подпространствах сферических гармоник", *Мат. заметки*, **82**:3 (2007), 323–334.
- [35] Балова Е. А., Осипенко К. Ю. "Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным", *Мат. заметки*, **104**:6 (2018), 803–811.
- [36] Бахвалов Н. С. "Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **11**:4 (1971), 1014–1018.
- [37] Выск Н. Д. "О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны", *Владикавк. матем. журн.*, **8**:4 (2006), 13–18.
- [38] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным", *Матем. зам.*, **81**:6 (2007), 803–815.
- [39] Габушин В. Н. "Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p ", *Мат. заметки*, **1**:3 (1967), 291–298.
- [40] Габушин В. Н. "О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой", *Мат. заметки*, **6**:5 (1969), 573–582.
- [41] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [42] Ильин В. А., Позняка Э. Г. Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1973.
- [43] Калябин Г. А. "Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина)", *Функц. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 29–38.
- [44] Колмогоров А. Н. "О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале", *Уч. зап. МГУ*, **30** (1939), 3–16.
- [45] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [46] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
- [47] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- [48] Кривошеев К. Ю. "Об оптимальном восстановлении линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой", *Мат. сб. (в печати)*.
- [49] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
- [50] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- [51] Левин В. И. "Точные константы в неравенствах типа Карлсона", *ДАН*, **59** (1948), 635–638.
- [52] Лунев А. А., Оридорога Л. Л. "Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных", *Мат. заметки*, **85**:5 (2009), 737–744.
- [53] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным", *Мат. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.
- [54] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.
- [55] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. "Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления", *Пробл. передачи информ.*, **39** (2003), 118–133.
- [56] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление производных на соболевских классах", *Владикавк. матем. журн.*, **5**:1 (2003), 39–47.
- [57] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64.

- [58] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 67–82.
- [59] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление операторов по неточной информации”, Математический форум. Т.2. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2009, 158–192.
- [60] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54.
- [61] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функ. анал. и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79.
- [62] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации”, *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302.
- [63] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру”, *Матем. зам.*, **92**:1 (2012), 59–67.
- [64] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 155–174.
- [65] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений по неточным измерениям”, *Проблемы математического анализа*, **69** (2013), 47–54.
- [66] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах”, *Изв. РАН. Сер. мат.*, **78**:6 (2014), 83–102.
- [67] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О восстановлении сигналов по спектру”, Труды Международной летней Школы–Конференции С. Б. Стечкина по теории функций, Полиграф ООО “Офсет”, Душанбе, 2016, 151–160.
- [68] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру”, *Тр. МИАН*, **293**, (2016), 201–216.
- [69] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем. сб.*, **203**:4 (2012), 119–130.
- [70] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106.
- [71] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
- [72] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. “Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек”, *Мат. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368.
- [73] Никольский С. М. “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *Успехи мат. наук*, **5**:2 (1950), 165–177.
- [74] Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988.
- [75] Осипенко К. Ю. “Оптимальная интерполяция аналитических функций”, *Мат. заметки*, **12**:4 (1972), 465–476.
- [76] Осипенко К. Ю. “Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек”, *Мат. заметки*, **19**:1 (1976), 29–40.
- [77] Осипенко К. Ю. “Наилучшие методы приближения и порядок информативности систем”, *Матем. сб.*, **111**:4 (1980), 532–556.
- [78] Осипенко К. Ю. “Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью”, *Матем. сб.*, **118**:3 (1982), 350–370.
- [79] Осипенко К. Ю. “Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция функций, заданных с ошибкой”, *Матем. сб.*, **126**:4 (1985), 566–575.
- [80] Осипенко К. Ю. “О произведениях Бляшке, наименее уклоняющихся от нуля”, *Мат. заметки*, **47**:5 (1990), 71–80.
- [81] Осипенко К. Ю. “Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций”, *Матем. сб.*, **182**:5 (1991), 723–745.
- [82] Осипенко К. Ю. “Неравенства для производных аналитических в полосе функций”, *Мат. заметки*, **56**:4 (1994), 114–122.
- [83] Осипенко К. Ю. “Об n -поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 55–79.
- [84] Осипенко К. Ю. “Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **192**:2 (2001), 67–86.
- [85] Осипенко К. Ю. “О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным”, *Владикавказский мат. журн.*, **6**:4 (2004), 55–62.
- [86] Осипенко К. Ю. “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

- [87] Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106.
- [88] Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление в весовых пространствах с однородными весами”, *Матем. сб.* (в печати).
- [89] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. “О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана”, *Мат. заметки*, **49**:4 (1991), 95–104.
- [90] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. “Оптимальное восстановление производных аналитических и гармонических функций по неточным данным”, *Мат. заметки*, **53**:5 (1993), 87–97.
- [91] Парфенов О. Г. “Поперечники по Гельфанду единичного шара H^p в весовых пространствах”, *Мат. заметки*, **37**:2 (1985), 171–175.
- [92] Сивкова Е. О. “Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье”, *Владикавказ. матем. журн.*, **14**:4 (2012), 63–72.
- [93] Сивкова Е. О. “Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 175–185.
- [94] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — МГУ, М., 1965.
- [95] Стечкин С. Б. “Наилучшее приближение линейных операторов”, *Мат. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.
- [96] Тайков Л. В. “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Мат. заметки*, **1**:2 (1967), 104–109.
- [97] Тайков Л. В. “Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования”, *Мат. заметки*, **4**:2 (1968), 233–238.
- [98] Тихомиров В. М. “Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C_{[-1,1]}$ ”, *Матем. сб.*, **80**:2 (1969), 290–304.
- [99] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
- [100] Трауб Дж., Вожьяковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
- [101] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966.
- [102] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1966.
- [103] Хавинсон С. Я. “Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области”, *Успехи мат. наук*, **18**:2 (1963), 25–98.
- [104] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.